DOMANDE E RISPOSTE II

18-26 agosto 2018

(con commento)

RISPOSTE BASATE SU QUELLE DA ME DATE A QUORA IN ITALIANO

Ne ho date sino ad oggi, 26 agosto 2018, sessantadue, a partire dalla fine di maggio 2018. Esse sono state viste da 18500 visitatori.

25 agosto 2018

Così come la divergenza di un campo ci dice quali sono le sorgenti di esso, cosa rappresenta il *Laplaciano*?

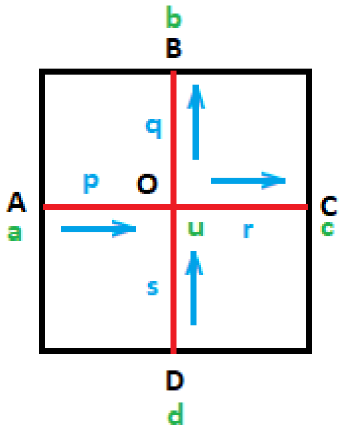
Le definizioni e dimostrazioni matematiche delle altre risposte sono indiscutibili. Dubito però che rispondano alla domanda, se il richiedente vuole avere un'idea intuitiva del Laplaciano, normalmente rappresentato con Δ(f(x, y, z). Io mi servirei di un esempio che ho trovato nell'opera del mio divulgatore di matematica prediletto , W. W. Sawyer (*"A Path to Modern Mathematics"*, 1966).

Supponiamo di scegliere un esempio in due dimensioni.

Sia un foglio di rame con batterie connesse a punti sul suo contorno. Come risultato, una corrente elettrica fluirà attraverso il foglio. Noi vogliamo investigare la distribuzione spaziale bidimensionale di questa corrente.

Per una trattazione elementare supponiamo di sostituire il foglio con una rete di rame a maglie quadrate finissime. Come un fazzoletto assomiglia (da lontano) a un foglio continuo, così la nostra rete di rame potrà assomigliare a un foglio di rame, purché le maglie siano abbastanza minute. E' ragionevole pensare che la distribuzione di correnti nella rete possa in questo caso approssimare da vicino la distribuzione di correnti nel foglio.

Ma, minute o no, possiamo pensare di ingrandire le maglie in modo da disegnare la rete su un foglio quadrettato su cui segneremo un'origine e due assi, x e y, paralleli ai lati perpendicolari dei quadretti. A questo punto, per seguire meglio il ragionamento, sarebbe bene prendere carta e matita e disegnare una croce, con centro sull'origine O, e i quattro punti a distanza h da O sui quattro bracci della croce, precisamente A a ovest, B a nord, C a est, D a sud. E' tutto quel che occorre.



Il lato di ogni braccio (rosso) o maglia, valga h

Vediamo dunque come scorre la corrente elettrica nella rete. Valgono due leggi assai semplici:

La prima legge la possiamo chiamare "equazione di continuità". Essa afferma che le correnti elettriche scorrono nella rete come acqua attraverso una rete di tubi. In particolare, scelto un punto sulla rete come origine O, con coordinate 0,0, ci sono quattro correnti che arriveranno o usciranno dal punto O. Siano ad esempio:

i) Provenienza dal punto A (-h, 0), corrente p

ii) uscita verso il punto B (0,h), corrente q

iii) uscita verso il punto C(h,0), corrente r

iv) Provenienza dal punto D(0, -h), corrente s

Qui, come si è già notato, h è la lunghezza di un lato della maglia quadrata.

Ora, se non ci sono sorgenti d'acqua (di elettricità) in O, la somma delle correnti entranti deve essere eguale a quella delle correnti uscenti. Quindi, per noi, p+s = q+r.

Questa è, evidentemente, una forma rudimentale della *"equazione di continuità".* Come specifica la domanda, essa ci dice "dove sono le sorgenti del campo", sia esso elettrico o idrico. Se p+s-q-r fosse diversa da zero ne dedurremmo che in O c'è una sorgente di corrente.

La seconda legge è la legge di Ohm. Ad ogni punto (x,y) associamo un potenziale V(x,y) (per punti si intendono solo i punti della rete che hanno coordinate intere, agli incroci dei fili della maglia). Il potenziale è come l'elevazione per l'acqua: come l'acqua fluisce dai punti che hanno maggior elevazione a quelli che stanno più in basso, così la corrente elettrica fluisce dai punti che hanno maggior potenziale a quelli che hanno minor potenziale. Chiamiamo u, a, b, c, d il potenziale nei punti O, A, B, C, D. Se una corrente p entra in O da A, ciò significa che a > u. La caduta di potenziale tra A e O è a-u volt. La legge di Ohm afferma che la differenza di potenziale tra due punti A e O (volt) è proporzionale alla corrente I (Ampere).

Differenza di V tra due punti = R I (dove R è la resistenza e I la corrente che scorre fra quei due punti)

Per semplicità, supponiamo R=1 unità di resistenza, e quindi la corrente p sia non solo proporzionale alla differenza di potenziale, ma sia eguale a tale differenza. Ciò valga per tutte le correnti.

Quindi:

$$p = a-u$$

$$q = u-b$$

$$r = u-c$$

$$s = d-u$$

Sostituendo nell'equazione p+s=q+r, otteniamo:

$$(a-u)+(d-u) = (u-b)+(u-c)$$

E poi, combinando "opportunamente" i termini:

I $$((c-u)-(u-a)) + ((b-u)-(u-d))=0$$

"opportunamente" significa che abbiamo notato che a,u,c sono lungo l'asse x; mentre b, u, d sono lungo l'asse y. Null'altro è cambiato.

2. CALCOLO INFINITESIMALE NON PROPRIO INFINITESIMALE

A questo punto mostriamo un esempio di calcolo infinitesimale non proprio infinitesimale, per principianti.

Supponiamo di avere una funzione che a intervalli regolari h assume valori i valori a , b, c , d . Per esempio misuriamo lo spazio percorso da un centometrista, di quelli che fanno i cento metri in dieci secondi.

Secondi Distanza

1 ……… a = 8 (partenza)
2 ………. b = 17
3. ………. c= 28
4. ………. d= 38
5. ………. e = 48
6. ………. f = 58
7. ………. g= 68
8. ………. h = 78
9. ………. i = 88
10. ……. j = 100 (scatto finale)

Possiamo calcolare la velocità media sul percorso, e otteniamo 10 m/s. Però possiamo essere più precisi, per vedere come si è comportato lo scattista, e calcolare la velocità misurando lo spazio percorso in un dato tempo h. Per esempio scegliamo h = 5 secondi. Allora vediamo che

Velocità nei primi 5 secondi = (e-0)/5 = 48/5 = 9.7 m/s

Mentre la velocità negli ultimi 5 secondi = (j-e)/5 =52/5 = 10.5 m/s

A numeratore si mette sempre il tempo percorso in un dato intervallo di tempo, a denominatore si mette l'intervallo di tempo. Possiamo pensare di avere velocità sempre più precise riducendo l'intervallo di tempo a 2 secondi, a 1 secondo. Ma si vede che scegliendo intervalli di tempo sempre più piccoli, la velocità non va a zero, come si sarebbero probabilmente aspettati tutti i Greci meno Archimede. Gli altri Greci si sarebbero aspettati che in tempi tendenti a zero lo spazio tenderebbe a zero, e la velocità sarebbe zero, per cui il moto sarebbe impossibile (uno dei loro – falsi – paradossi). Invece, se misuriamo lo spazio percorso ogni 2 secondi, nel primi due secondi la velocità è (b-0)/2 = 17/2 = 8.5 m/s, ma dopo altri due secondi è (d-b)/2 = 11 m/s. Se misuriamo ogni secondo, abbiamo (a-0)/1 = 8, (b-a)/1 = 9, (c-b)/1= 11.

Di qui parte il calcolo infinitesimale: diminuendo il tempo percorso diminuisce anche lo spazio percorso, ma il rapporto tra i due non scende necessariamente a zero: va a zero solo se il corridore si ferma qualche secondo per strada, cosa che normalmente non avviene. In conclusione, la velocità in un periodo di tempo h è data da (a-0)/h, b-a)/h, (c-a)/ h *per h sempre più piccoli*. Il limite verso cui muove questo valore diminuendo l'intervallo di tempo è detto **derivata prima della funzione spazio rispetto alla variabile tempo.**

Dobbiamo fare ancora un passo, se vogliamo arrivare al Laplaciano.

Possiamo fare anche la **derivata seconda dello spazio rispetto al tempo**. Il metodo è semplice: si fa la differenza non degli spazi percorsi ma delle derivate prime consecutive, e si divide ancora per lo stesso intervallo di tempo h.

Per esempio, un'approssimazione della derivata seconda rispetto al tempo nel secondo 2 sarà:

$((c-b)/h – (b-a)/h)/h = (c-2b+a)/h^2$

E per avere la derivata seconda si dovrà calcolare il numeratore corrispondente ad h sempre più piccoli.

Ci dice qualcosa, questa derivata? Evidentemente ci dice se la "curva" (in realtà spezzata) per cui la calcoliamo in b è concava o convessa: vediamo che il numeratore c -2b +a può essere scritto 2((c+a)/2 -b). Se il numeratore è negativo, ciò vuol dire che b è maggiore della media di c e a, cioè del valore p che la spezzata assumerebbe se a, b, c fossero allineati, e quindi la spezzata ha un massimo in b.

Per convincersi del fatto che il punto mediano se i punti fossero allineati avrebbe valore (a-c)/2, si deve solo fare una proporzione : p-a sta ad h come c-a sta a 2h. Cioè:

(p-a)/h = (c-a)/2h, da cui p-a = c/2 – a/2 e finalmente p = (c+a)/2.

3. TORNIAMO A NOI

L'equazione (I), pur ottenuta in modo così elementare, ci dà alcune informazioni preziose.

$$((c-u)-(u-a)) + ((b-u)-(u-d))=0$$

1) Dividendo per h^2 (ciò che possiamo sempre fare) abbiamo:

$$(c-2u+a)/h^2 + (d-2u+b)/^2 =0$$

Ma questa, se confrontiamo con il nostro "calcolo infinitesimale non proprio infinitesimale", non è altro che la somma delle "derivate seconde (approssimate) del potenziale" lungo l'asse x e lungo l'asse y, cioè le derivate parziali secondo, che, passando al limite per maglie infinitesimali, come si apprende al secondo anno di analisi matematica, diventa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

o, meglio ancora

Laplaciano del potenziale = ΔV= 0 (in due dimensioni). L'estensione al caso tridimensionale non è difficile.

Dunque, se in una data regione non ci sono sorgenti di corrente, avremo che ΔV = 0 (ove Δ è il simbolo tradizionale del laplaciano e V è il potenziale). Il risultato è valido, anche se ottenuto in modo poco formale e poco rigoroso (ma sono convinto che nel retro della mente di chi trovò per primo questo risultato c'era qualcosa di simile a questo ragionamento).

Ma l'equazione I ci dice qualcos'altro:

2) Portando le u della equazione I a secondo membro abbiamo:

a+b+c+d =4u, cioè u = (1/4)(a+b+c+d): *il potenziale in un punto è la media dei potenziali dei quattro punti contigui.*

Dunque abbiamo un'indicazione che riguarda una funzione in una regione in cui essa rispetta l'equazione Δ(V)= 0. Essendo u la media dei potenziali nei quattro punti contigui (a,b,c,d), **esso**

non può essere un massimo della funzione, in quanto, per essere tale, dovrebbe essere maggiore di ciascuno di essi. Ciò vale in generale **per tutti i punti della regione in cui Δ(f(x,y)) = 0.**

E per una trattazione elementare del Laplaciano, per colpa della quale Pierre-Simon, marchese de Laplace (1749-1827) si rivolta nella tomba (ma forse no, in realtà Pierre-Simon de Laplace sorride) penso che possa bastare così.

Mi spiace solo di non essere l'ideatore di questo approccio.

Aggiornamento ultimo: 25 agosto 2018

Perché Otto Von Bismarck si è dovuto dimettere come cancelliere di Prussia?

Bismarck era abituato a comandare. Sulla sua lapide volle che fosse scritto: "Fedele servitore dell'Imperatore Guglielmo I", non Guglielmo II. In realtà Bismarck approfittava di un'ordinanza del Regno di Prussia (8 settembre 1852), peraltro mai invocata, per cui i membri del consiglio dei Ministri non potevano parlare all'Imperatore se non tramite il Ministro Presidente/ Cancelliere. Guglielmo I, grato a Bismarck per essere diventato Imperatore nel 1871 e ormai anziano, ebbe anche discussioni con lui, ma lo sostenne invariabilmente. Per cui si può dire che effettivamente chi comandò per ventotto anni, prima nel Regno di Prussia (1862–1873, data formale) e poi nell'Impero Tedesco (1873–1890) fu Bismarck. Assai frequentemente ebbe il parlamento avverso, tanto in Prussia quanto nell'Impero, cosa che non lo impressionò minimamente, in quanto egli si considerava responsabile esclusivamente verso Guglielmo I.

Penso che la sua politica personale avesse tre punti fondamentali: (1)l'ambizione di comandare, (2) la grandezza (non lo strapotere) e la sicurezza della Germania (la seconda prevedeva l'isolamento della Francia) ; (3) la fedeltà all'Imperatore (almeno fino a che questi gli obbediva).

Fu un politico eccezionale : in pratica il destino politico dell'Europa per gran parte del XIX secolo fu in mano a due statisti tedeschi, entrambi fautori dell'equilibrio (un surrogato della pace): Metternich dal 1813 al 1848 e Bismarck dal 1862 al 1890.

I punti principali della "*Realpolitik* " di Bismark, erano:

1. Riconoscere le sue sconfitte e fare marcia indietro al momento opportuno. Le sue battaglie contro il socialismo e contro i Cattolici (il celebre "*KulturKampf*", a partire dal 1872) si risolsero in due sconfitte, per cui egli finì coll'appoggiarsi ai Cattolici (1878) per avere a sua volta appoggio contro i Socialisti. Inoltre, per togliere impeto al socialismo creò il primo stato assistenziale ("*Welfare state*") moderno, con assicurazione contro le malattie e gli infortuni, e pensione, un'innovazione che non esisteva altrove. Questi provvedimenti, a partire dal 1880, ridussero grandemente l'emigrazione di giovani lavoratori tedeschi negli Stati Uniti.
2. Superare le sue antipatie, se trovava la cosa conveniente al futuro della Germania. Ad esempio disprezzava l'Italia, ma, come Napoleone III, sia pure con scopi e per motivi diversi, fu uno dei maggiori sostegni della nostra unificazione (alleanza nella seconda guerra di indipendenza, 1866). Inoltre costrinse l'Austria a formare con l'Italia la Triplice Alleanza, 1882 (poco gradita ai patrioti di Austria e Italia, ma indubbiamente utile agli interessi dei tre Paesi).

3. Le sue guerre erano precise, brevi e limitate come operazioni chirurgiche non invasive. La guerra preventiva per lui era “come suicidarsi per paura della morte”, e rifiutò di prenderla in considerazione, contro le richieste di gran parte dell’opinione pubblica e dei militari, tanto contro la Francia quanto contro la Russia. Gli obiettivi di una guerra dovevano essere chiari fin dal principio, e soprattutto non dovevano allargarsi in caso di successo. Il nazionalismo nemico non andava esasperato con sconfitte schiaccianti. Così arrestò la guerra contro l’Austria nel 1866, dopo una sola grande battaglia (Sadowa-Koeniggratz, 3 luglio 1866), e si oppose alla marcia su Vienna, desiderata dai militari, nonché a grandi celebrazioni per la vittoria. Come risultato, dopo tre guerre in meno di un decennio (1863 -1871), l’Europa ebbe venti anni di pace (e poi un’altra ventina sotto i primi successori di Bismarck, che erano avversi a lui e alla sua politica, ma erano timidi nell’abbandonare i suoi piani in politica estera). Il caso della Francia fu un’eccezione, anche se le operazioni militari furono praticamente concluse, come di solito, in un paio di mesi (19 luglio-1 settembre 1870). Ma qui Bismarck non riuscì a fermare i suoi generali, primo fra tutti Moltke (suo notevole collaboratore militare, che però aveva idee politiche diverse), che non vollero arrestarsi prima di aver conquistato Parigi (28 febbraio 1871), cosa che Bismarck non desiderava per non esasperare il nazionalismo francese. Non era neppure molto favorevole all’annessione di Alsazia e Lorena, richiesta dai militari: dichiarò di non volere troppi Francesi nei territori dell’Impero tedesco. Ma, dopo la presa di Parigi, capì che con la Francia si era creata una frattura insanabile, e pare che abbia commentato: “Ormai tanto vale annettere Alsazia e Lorena”. Come Bismarck aveva inizialmente previsto, si trattò di due errori, densi di conseguenze. Già nel 1875 poteva dirsi che la Francia si era rapidamente ripresa, ed era esasperata contro la Germania: di qui nacque per Bismarck la necessità di rafforzare l’isolamento in cui l’aveva posta prima della crisi del 1870. Ebbe successo, ma solo lui era in grado di mantenerlo: non i suoi inetti successori, con tutto quello che ne seguì.
4. Credeva che gli Stati come tali non dovessero immischiarsi in una politica coloniale, che poteva solo portare a contese che rischiavano di alterare l’equilibrio europeo, l’unico che gli interessava. Però sosteneva gli interessi privati in Africa e Oceania. Poi, nel 1883–84, Bismarck d’improvviso cambiò politica creando un impero coloniale nel Sud Pacifico (incominciando dalla Nuova Guinea) e in Africa (in Togo, in Camerun, nell’attuale Namibia, nel Tanganika). Le ragioni di questo improvviso mutamento non sono chiare. In ogni caso, al Congresso di Berlino (1884–85), sotto la sua guida furono stabilite efficaci regole per l’acquisizione di territori in Africa.

Guglielmo I morì nel 1888 e gli successe il figlio Federico III, a cui Bismarck non era gradito. Però Federico III morì dopo tre mesi di regno, e salì al potere suo figlio Guglielmo II. Bismarck, affermano alcuni storici, non era preparato a interagire con Guglielmo II, cosa che mi sembra poco probabile, perché Federico III era già gravemente ammalato quando prese il potere. Penso invece più probabile che Guglielmo II avesse già deciso da tempo di disfarsi di Bismarck.

Il nuovo imperatore, ventinovenne, non era ovviamente abituato a comandare, ma, ambizioso e abbastanza inesperto, era deciso a comandare lui, il che significava, come aveva previsto Bismarck, che sarebbe caduto nelle mani di cortigiani incompetenti (consiglieri politici, e, peggio ancora, militari). Inoltre, Guglielmo II non sentiva nessun motivo di gratitudine per Bismarck.

A questo punto penso che fosse solo questione di pretesti e di tempo, perché Bismarck fosse forzato a dare le dimissioni, il primo compito che si era copertamente proposto l’Imperatore.

Praticamente l’Imperatore mostrò il suo disaccordo con Bismarck su ogni punto che Bismarck riteneva fondamentale per la politica tedesca. Si tratta di questioni grandi e piccole, di cui enuncerò solo le principali, anche perché penso che la lotta per il vero potere, nella quale Bismarck poteva soltanto perdere, fosse il vero motivo che stava alla base di tutti i dissapori fra i due, che dovevano portare inevitabilmente al licenziamento-dimissioni di Bismarck.

I punti di maggior disaccordo furono:

1. L'imperialismo (*Weltpolitik*) a cui tendeva il giovane imperatore, opponendosi alla cauta politica di equilibrio di Bismarck.
2. Il segreto e perciò rischioso "Trattato di Controassicurazione" (1887), voluto da Bismarck, che permetteva alla Germania di non essere in disaccordo con la Russia. Invece Guglielmo II voleva una fedeltà assoluta all'Impero Austriaco, per esempio in caso di contrasti o addirittura una guerra Austro-Russa.
3. L'atteggiamento verso il socialismo. Nel 1890 Bismarck tentò di far passare una legge fortemente anti-socialista, con il probabile scopo di provocare un'insurrezione socialista, che sarebbe stata soffocata con la forza. Guglielmo, assai più moderato verso i socialisti, rifiutò, perché "non voleva incominciare il suo regno con un bagno di sangue dei suoi sudditi". Nella confusione delle trattative circa la legge anti-socialista, il suo partito di governo, il cosiddetto *Kartell*, non riuscì a sostenerlo, e il suo governo cadde.
4. La goccia che fece traboccare il vaso fu il tentativo di Bismarck di riprendere il potere formando una coalizione anti-socialista con il centro (cattolici) e i conservatori. Quando seppe di un incontro fra Bismarck e Windthorst, il capo del partito cattolico, l'imperatore s'infuriò. Il 15 marzo 1890, ebbe luogo un colloquio tempestoso, il cui esito era ormai scontato: l'imperatore non aveva ancora appreso a moderare i suoi sentimenti, e Bismarck, settantacinquenne, non sapeva più moderare i suoi. Prima di uscire infuriato, l'Imperatore ordinò che fosse abolita l'ordinanza del 1852 sopracitata, che impediva che i ministri riferissero direttamente all'Imperatore. Dopo di ciò, Guglielmo II chiese con insistenza le dimissioni del Cancelliere, che finalmente cedette. La lettera di dimissioni firmata da Bismarck porta la data del 18 marzo 1890, amara lettera che fu pubblicata solo dopo la sua morte. Il 20 marzo si dimise ufficialmente. La parte intellettuale del pubblico rispose con sollievo alle sue dimissioni. Il popolo sembra abbia guardato a lui con maggior simpatia.

Come contentino ebbe la promozione a "colonnello generale con la dignità di Maresciallo" e fu nominato Duca di Lauenburg. Commentò che questo titolo gli sarebbe stato utile quando avesse voluto viaggiare in incognito.

Ritiratosi a Varzin in Pomerania, un mese dopo la morte della moglie (27 novembre 1894) si trasferì a Friedrichsruh presso Hamburg, dove visse in ritiro scrivendo le sue memorie, e sempre aspettando di essere richiamato al potere in qualche forma. L'Imperatore di fatto lo visitò alcune volte, ma un richiamo non avvenne mai, in nessuna forma.

Bismarck morì la sera del 30 luglio 1898.

Aveva previsto che se la Germania continuava a procedere sulla via intrapresa dopo il suo licenziamento, il disastro sarebbe avvenuto vent'anni dopo la sua morte. I fatti gli diedero ragione: l'11 novembre 1918 la Germania si arrendeva ponendo fine alla disastrosa Prima Guerra Mondiale.

NOTE.

1. A questo punto mi pare utile inserire un insolito ritratto di Bismarck, che mi fa meditare.

File:Bismarck11Jahre.jpg - Wikimedia Commons

2. Sul mio sito ho messo un post dal titolo: “Perché Bismarck si dimise nel 1890?”, il cui testo principale è quello dato in questa risposta. Ho però aggiunto un documento a mio parere interessante.

Aggiornato il 24 agosto 2018

In che modo i satelliti televisivi stazionano nello spazio per adeguarsi alla velocità terrestre?

Il satellite *appare* stazionario nello spazio se compie la sua rivoluzione intorno alla Terra in un giorno sidereo. Periodo e raggio dell’orbita sono legati dalla terza legge di Keplero. Noi sappiamo il periodo T che vogliamo ottenere, e quindi possiamo ottenere r, il raggio dell’orbita cercata.

Si supponga un satellite che muove in orbita circolare equatoriale a velocità uniorme v intorno alla Terra. Le equazioni del moto sono:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dove $\vec{a}$ è l’accelerazione, data da v^2/r (1), mentre F, forza gravitazionale , è GMm/r^2. Quindi

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Da cui:

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

in cui abbiamo cancellato le m, poiché la massa gravitazionale del satellite, a sinistra, è eguale alla massa inerziale, a destra. Considerando che $v = \frac{2\pi r}{T}$

otteniamo $$r = \left(GM\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(dove r è il raggio cercato dell’orbita e T è il periodo di rivoluzione che vogliamo imporre).

Si tratta di una forma semplificata della terza legge di Keplero, che recita “*i quadrati dei tempi periodici sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori dell’ellisse che rappresenta l’orbita di un pianeta*”. Qui r è metà di qualsiasi asse (diametro).

Se il satellite artificiale percorre l'orbita circolare in un tempo uguale al giorno siderale, *T* = 23 h 56 min 4,09 s = 86 164,09 s, esso, rispetto a un osservatore fisso sulla superficie terrestre, appare fisso nel cielo. Questo dunque è il periodo dell’orbita che cerchiamo, e *della quale vogliamo trovar il raggio.*

Inserendo le varie costanti (G = 6.67428 ± 0.00067 × 10−11 $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, costante di gravitazione universale e M = 5.9736 × 10^{24} kg, massa della Terra) otteniamo l'orbita detta **"geostazionaria"** (vedi Orbita geostazionaria - Wikipedia) il cui raggio vale 42168 km, e su cui il satellite si muove alla velocità di 3 km/s (inevitabilmente…).

Talvolta si legge che l'orbita è alla distanza di circa 36000 km. La cifra è corretta, ma è misurata dalla superficie terrestre, e per avere il raggio dell'orbita occorre sommare il raggio della Terra, circa 6300 km.

Un posto sull'orbita è ovviamente molto ambito, soprattutto per satelliti di telecomunicazioni e meteorologici, che devono pure essere a una certa distanza l'uno dall'altro per evitare interferenze. Paesi situati sullo stesso meridiano vorrebbero avere tutti almeno un satellite geostazionario nella stessa regione dell'orbita, che è una sola, equatoriale. Le allocazioni di un sito sull'orbita e le dispute relative sono quindi gestite da un'organizzazione internazionale, la International Telecommunication Union, con sede a Ginevra e fondata, diremmo con una certa preveggenza, nel 1865.

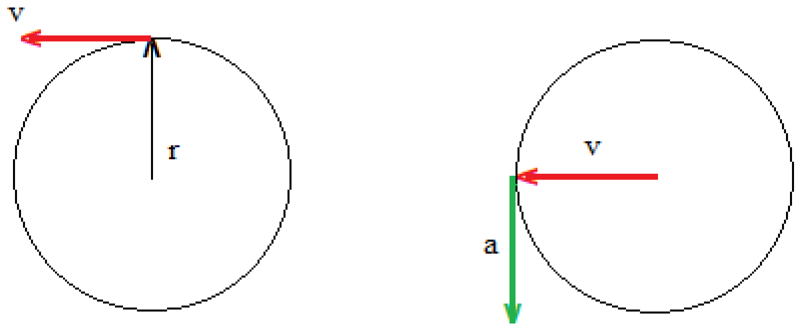
Pare che la prima idea di utilizzare un'orbita stazionaria per telecomunicazioni sia stata suggerita in una serie di racconti di fantascienza di tale George O. Smith "*Venus equilateral*" nel 1942–1945. Una stazione di telecomunicazioni *stazionaria rispetto a Sole e Venere* sarebbe piazzata nel punto lagrangiano L4 di tale sistema (2). Questa priorità fu riconosciuta a Smith anche da A.C.Clarke (1945), a cui l'idea di piazzare satelliti di telecomunicazioni in orbita, questa volta "*geostazionaria*" (i cui punti appaiono stazionari rispetto alla Terra, è generalmente attribuita. Clarke notò anche che un satellite in quest'orbita così lontana vedrebbe quasi un emisfero terrestre, e potrebbe funzionare da relè (ripetitore) tra due punti sulla Terra che non possono comunicare direttamente, essendo ciò loro vietato dalla curvatura della superficie terrestre.

NOTE:

(1) **Accelerazione angolare a = v^2/r**

Questa relazione deriva dal fatto che nel **moto uniforme** il vettore velocità non cambia modulo, e percorre nel tempo T l'orbita circolare mantenendosi perpendicolare al raggio. Quindi v/(2πr) =1/T.

Possiamo ora considerare come cambia la velocità. Fissando un estremo del vettore velocità come centro di un cerchio, l'altro estremo ne percorre la circonferenza , e la velocità con cui lo fa è perpendicolare al raggio, il quale in questo caso è il vettore velocità. Quando il punto orbitante avrà terminato il suo giro (dopo un tempo T), anche la velocità sarà ritornata a puntare nella direzione di partenza, dopo un tempo T. Ma la velocità della velocità è l'accelerazione, la quale nello stesso tempo T percorre un cerchio di raggio v. Abbiamo quindi a/v = v/r = 2π/T, cioè a = v^2/r.

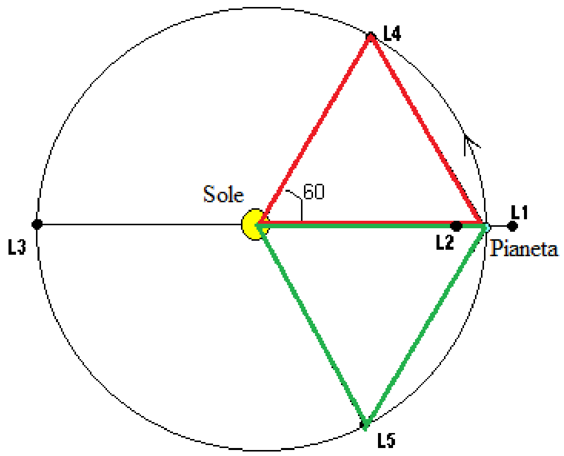


v sta ad **r** come **a** sta a **v**

In quanto compiono un giro nello stesso tempo T

(2) **Cinque Punti Lagrangiani**

Lagrange, nello studio del “problema dei tre corpi” trovò (1772) una soluzione per il caso in cui la massa di uno dei tre corpi sia trascurabile, nel senso che non altera il campo gravitazionale formato dagli altri due corpi. La soluzione prevede che **cinque punti, i punti lagrangiani, si muovano rigidamente insieme ai due corpi più massicci nel corso della loro rotazione uno intorno all’altro**. Nel sistema Sole-Venere tre dei cinque punti sono allineati nel seguente ordine: **L3, Sole, L1, Venere, L2.** Altri due punti, **L4 e L5** sono posti simmetricamente rispetto a questa retta, ai vertici di due triangoli equilateri che hanno come lato base comune la congiungente Sole-Venere. Di qui il nome della raccolta di fantascienza “Venus equilateral” che racconta le vicende di una stazione di telecomunicazioni piazzata appunto in L4



I cinque punti Lagrangiani in un sistema “Sole-Pianeta”

24 agosto 2018

Perché il valore Pi sembra senza fine?

In realtà il numero π, perché è irrazionale, e i numeri irrazionali sono “decimali”, “illimitati (= senza fine)” e “aperiodici (=non presentano un periodo che ripete indefinitamente)”. Infatti, tutti i numeri periodici (pure loro, a modo loro, senza fine) posseggono una frazione generatrice e quindi sono razionali.

La dimostrazione dell’irrazionalità di π è dovuta a Lindemann (1882), che, in realtà, dimostrò la trascendenza di π, il che significa che, oltre a essere irrazionale, π non è la soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali, non importa di che grado. L’irrazionalità è in certo senso un caso particolare della trascendenza, in quanto non è altro che l’impossibilità che si possa scrivere l’equazione di primo grado in π, data da

$$a\pi - b = 0$$

Per dimostrare il suo notevole teorema, Lindemann si basò sul metodo con cui Hermite nel 1873 aveva dimostrato la trascendenza della costante e.

Eventualmente si può visitare il mio sito Trascendenza delle costanti e e pigreco

in cui cerco di spiegare le due dimostrazioni, o almeno quello che ne ho capito io, nel modo più semplice possibile (il che significa anche meno rigoroso possibile).

Pur avendo fatto ogni sforzo per essere chiaro, devo ammettere che dimostrare la trascendenza di π (e di e) non è un compito immediato.