

$$\ll F+V=L+2 \gg$$

(DESCARTES, 1640; EULER, 1742)

I. Abituale dimostrazione.

Eulero per prima cosa prende il poliedro, fa un buco in una faccia, e lo spiaccia su un piano. Tutto (angoli e lunghezze e aree) viene deformato, ma il numero di facce del poliedro non varia, il numero di lati neppure, e il numero di vertici nemmeno. La relazione tra queste tre grandezze varrà per la mappa sul piano come sul poliedro, purché si abbia l'avvertenza di notare che il buco fatto in una faccia del poliedro, eventualmente stirato in una sfera, diventa in pratica una faccia esterna della mappa, come si vede dal seguente disegno:

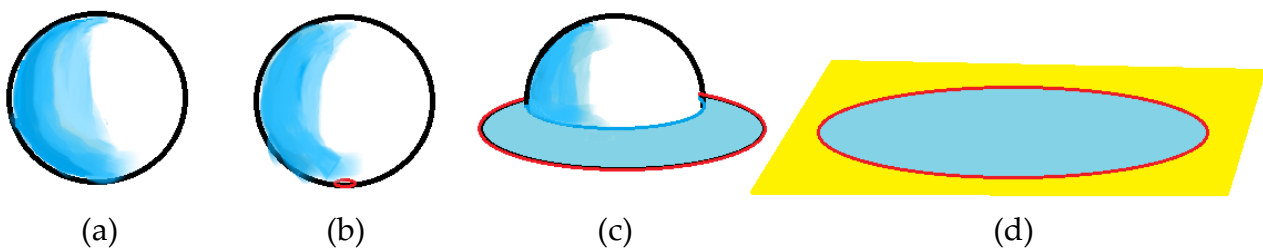


Fig.1

Procedimento di Eulero per trasformare una sfera (a) in un disco (d): buco come in (b) e progressivo schiacciamento della sfera e allargamento del buco. Il buco produce la faccia infinita gialla (ma così la sfera ha due facce...)

La dimostrazione abituale del teorema in esame risale a Cauchy, allora ventenne (1811), ed è una dimostrazione col metodo dell'induzione matematica. Le dimostrazioni per induzione mi lasciano sempre con la bocca amara: quello che Cauchy fa (e la maggior parte delle dimostrazioni scolastiche fanno) è dimostrare che:

“Se la formula $F + V = L + 1$ è valida per una mappa con F facce, essa è valida anche per una mappa con $F-1$ facce. Ma questo vuol dire che se la formula è valida per una mappa con $F-1$ facce, essa è valida per una mappa con F facce (ragionamento per me non immediato). **Poiché è valida per un mappa con una sola faccia** (Cauchy, grazie a una “triangolazione” preliminare della mappa, giunge a un'ultima faccia che è un triangolo, per cui vale la relazione $1+3=3+1$), **allora è valida per tutte le mappe con un numero superiore di facce** (dove F è il numero di facce, V il numero di vertici, L è il numero di lati). Qui, però, Cauchy deve aggiungere una faccia, la faccia esterna al poligono formato dal poliedro spiacciato sul piano, la faccia gialla di Fig. 1°, che però per la sfera non esiste, per ottenere la relazione $F+V=L+2$.

A parte il fatto che la dimostrazione è illusoriamente semplice, e alquanto macchinosa, la domanda che sorge spontanea è: *da dove piove la relazione $F+V=L+2$?*

Il metodo che vorrei seguire per dimostrare questa formula è invece il metodo più antico, che risale, si pensa, a Descartes (fu trovato nelle sue note postume: Descartes – *Cartesius* - morì nel 1650). Introdurrò qualche svolta semi-euristica estendendo il procedimento di Descartes al piano. Se il mio procedimento non convincerà il lettore curioso, egli potrà sempre seguire il procedimento di Courant & Robbins (*What is Mathematics, 1941, Capo V, §1*), basato sul metodo di Cauchy.

Supponiamo di avere un poliedro, per esempio una piramide con cinque facce come quella che ho disegnato in prospettiva in Figura 2(a), e di schiacciarlo in modo che la piramide di cinque facce combaci con la faccia inferiore (Fig.2(b)). Abbiamo quindi due pentagoni identici, appiattiti come una sogliola. Concentriamoci ora sulla faccia superiore.

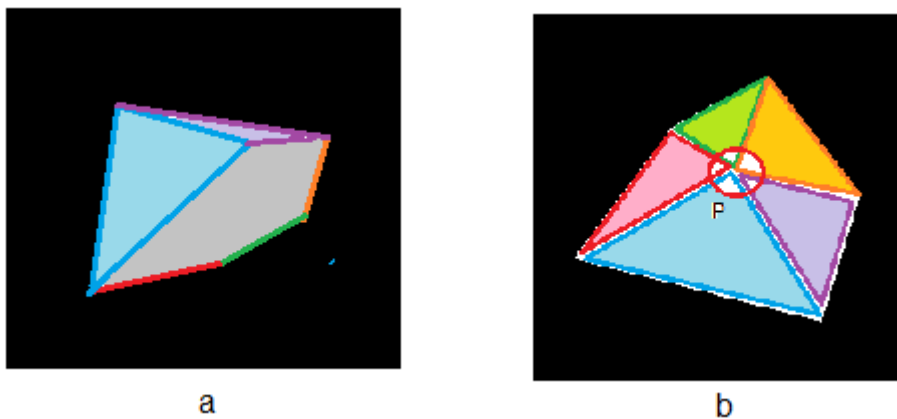


Fig 2

Piramide pentagonale e doppio poligono equivalente (doppio contando il pentagono grigio in (a), non visibile in (b)).

1) Il primo punto da tener presente è che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati, regolare o no, è data dalla somma di tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due. Sembra una dimostrazione difficile, ma è banale.

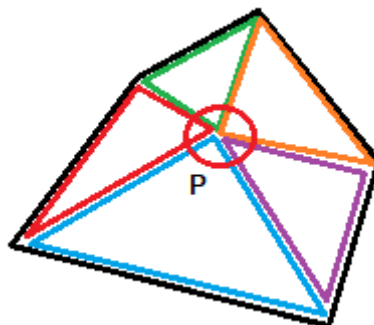


Fig.3

La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è n Piatti -2 .

Semplicemente, si sceglie un punto qualunque all'interno del poligono e si tracciano le

congiungenti ai vertici: nella nostra ex-piramide il gioco è già fatto. Si divide così il poligono in n (qui 5) triangoli. La somma degli angoli interni di ciascuno di questi triangoli, quale che sia la sua forma, è 1 angolo piatto. Quindi il totale è n angoli piatti. Però gli angoli al centro P formano un angolo giro (2 piatti, 360° , 2π radianti), e quindi il totale degli angoli **interni** ai vertici vale $(n-2)$ Piatti.

Occorre una una definizione di “**angolo esterno**”, che non è così immediata.

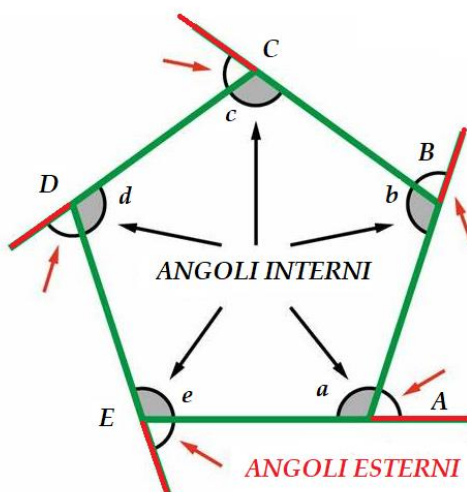


Fig.4

Angoli interni ed angoli esterni

Nella figura, gli angoli esterni e i vertici sono indicati con la stessa lettera maiuscola, gli angoli interni con la minuscola corrispondente. Per semplicità sceglieremo un poligono convesso.

Si definisce angolo esterno di un poligono (in un vertice qualsiasi) l'angolo formato tra il prolungamento di un lato oltre il vertice e il lato successivo.

In figura, si vede quindi che qualsiasi angolo esterno, a cui daremo il nome del vertice, maiuscolo, è eguale a un angolo piatto meno l'angolo interno corrispondente: ad esempio, abbiamo $A = \pi - a$. Se ora facciamo la somma degli angoli esterni troviamo che essa vale:

$$A + B + C + D + E = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) + (\pi - d) + (\pi - e)$$

Che, per un poligono di n lati, diventa :

$$\text{(Somma degli angoli esterni)} = n \pi - \text{(Somma degli angoli interni)}$$

Ma la somma degli angoli interni è già stata calcolata ed è $(n-2) \pi$, per cui la somma degli angoli esterni di un poligono (qui convesso) è data da:

$$\text{Somma angoli esterni} = [n - (n-2)] \pi = 2 \pi$$

(Notiamo *en passant* che la somma degli angoli esterni è sempre 2 Piatti indipendentemente dal numero di lati e noi potremmo euristicamente pensare che anche per una circonferenza, considerata come un poligono con un numero infinito di lati, la somma degli angoli esterni (qualunque cosa ciò significhi) valga ancora 2 Piatti.)

Calcoliamo adesso in due modi l'ampiezza totale degli angoli interni, in termini di angoli piatti nella nostra mappa planare di F facce, L lati, V vertici. Ognuna delle F facce di n lati contribuirà n-2 angoli piatti. Quindi, avremo che la somma totale è $TOT = F(n-2)$ Piatti. Ogni lato è comune a due facce. Quindi $F n = 2 L$. In conclusione, la somma degli angoli *interni* sulla mappa sarà:

$$TOT \text{ ANGOLI INTERNI} = 2(L-F)\text{Piatti.}$$

Ora valutiamo gli angoli in altro modo. Ad ogni vertice si incontra un numero variabile di facce, con angoli diversi. Tuttavia, sul piano ogni vertice contribuisce 2 angoli piatti. Ma abbiamo il confine esterno: l'intero diagramma è un poligono, e la somma degli angoli esterni di un poligono, come si è visto, è sempre 2 Piatti. Perciò il totale è $V \times 2\text{Piatti} - 2\text{Piatti}$. **Questi ultimi 2Piatti li potremmo chiamare il "difetto angolare". Questo difetto angolare, sul piano, si manifesta solo sul perimetro del poligono e in definitiva, è il contributo del solo poligono di contorno.** Nello spazio, un difetto angolare parziale si manifesta su ogni vertice, come mostrerò negli esempi sottostanti, *ma noi assumeremo euristicamente che nella trasformazione topologica che ha ridotto il poliedro a una figura piana, ma con due facce, il valore totale non muti.*

I due risultati devono essere eguali, quindi:

$$2(L-F)=2V-2$$

$$L-F=V-1$$

$$V+F=L+1$$

A questo punto siamo dove arriva Cauchy-Eulero col metodo induttivo. Ma ora occorre trovare una faccia da aggiungere, perché la formula cercata è diversa. Cauchy-Euler, come si è detto, inventano perciò la faccia esterna come in Fig.1 A, per cui $L-F^*=V+2$, dove F^* è il numero di facce aumentato della faccia esterna.

Ma secondo me avremmo mancato un punto essenziale, che invece non sfuggì a Cartesio. Non occorre una faccia esterna infinita come in Fig.1 A: basta ricordare che esiste la faccia sottostante del poliedro appiattito, il cui difetto angolare è pure 2Piatti. L'equazione $2(L-F^*)\text{Piatti} = (2V-4)\text{Piatti}$, avendo incluso in F^* anche la faccia inferiore, diventa $L-F=V-2$.

Coloro a cui non piace l'aver reso una superficie piatta a due facce equivalente topologicamente a un solido, vedano i seguenti esempi:

Si prenda un cubo e si calcoli "il difetto angolare" totale. Poiché a ogni vertice del cubo noi

perdiamo uno degli angoli retti, e ci sono otto vertici, il difetto angolare totale è 4Piatti .

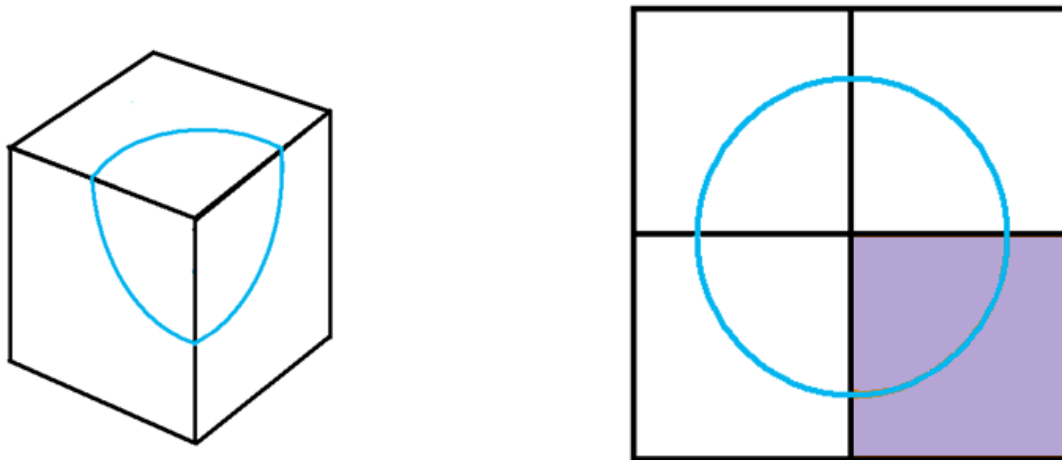


Fig. 5
Difetto angolare di $\frac{1}{2}$ Piatto ad ognuno degli otto vertici di un cubo

Questo risultato, che il cubo ha un “difetto angolare” uguale a 4Piatti , curiosamente, vale anche per ogni altro poliedro regolare o no. Intanto, evidentemente, vale per un parallelepipedo. Poi, come esempi, si vedano i difetti angolari di tetraedro e ottaedro, oltre al cubo.

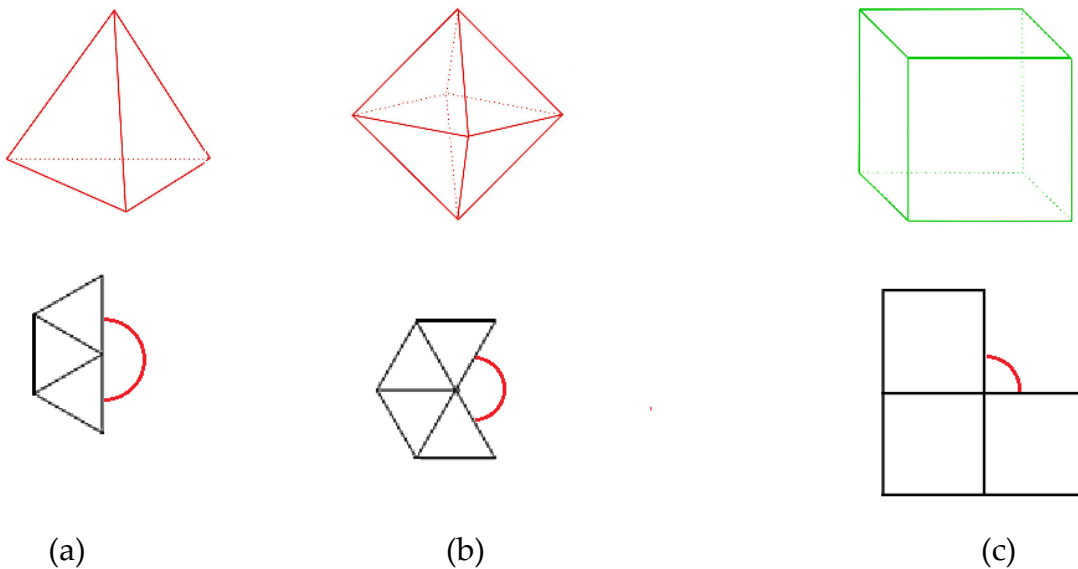


Fig. 6
Anche nel tetraedro e nell’ottaedro il difetto angolare totale è di 4Piatti (vedi testo).

Nel **tetraedro** (a) ad ogni vertice si incontrano tre facce che contribuiscono un angolo di 60 gradi ciascuna, un terzo di piatto. Le tre facce insieme contribuiscono un angolo Piatto; il difetto, marcato in rosso, è quindi 1 angolo piatto. Ci sono 4 vertici, difetto angolare

4Piatti.

Nell'**ottaedro** (b) ad ogni vertice si incontrano quattro facce che anche loro contribuiscono un terzo di Piatto ciascuna. Il difetto angolare è di $2/3$ di Piatto. Ci sono sei vertici...di nuovo il difetto angolare totale è 4 Piatti.

(I casi del dodecaedro e dell'icosaedro sono lasciati come esercizio).

Possiamo aggiungere che teoremi successivi (sostanzialmente basati sul concetto di curvatura gaussiana, dovuta a Gauss (1777-1855)) dimostrano che anche la sfera ha un difetto angolare di 4 Piatti. In altre parole, se gonfiamo il nostro cubo fino a farlo diventare una sfera, il difetto angolare totale non cambia. Mentre nei poliedri il difetto angolare è concentrato nei vertici, nella sfera è diffuso su tutta la sfera, ma il risultato finale è lo stesso: 4 Piatti, o 4π , o 720° .

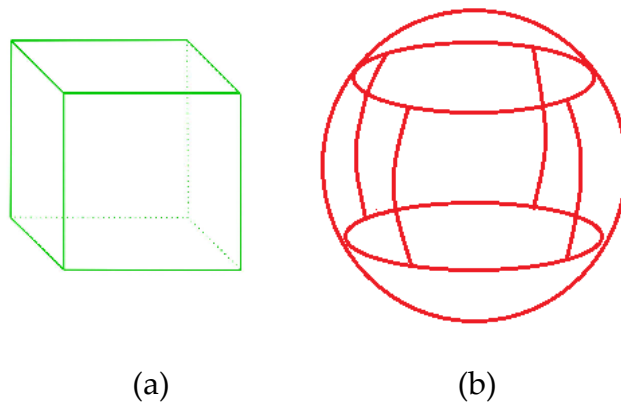


Fig. 5 A

Un cubo può essere gonfiato su una sfera, e il difetto angolare resta lo stesso (4 Piatti).

Sembra dunque che Descartes si sia imbattuto in un "invariante topologico". Ma – e qui è il passo euristico del mio percorso – se gonfiando il cubo su una sfera il difetto angolare resta 4 Piatti, *non sarà che appiattendo il cubo come una sogliola l'invariante resti lo stesso?* E ciò non varrebbe per qualsiasi poliedro?

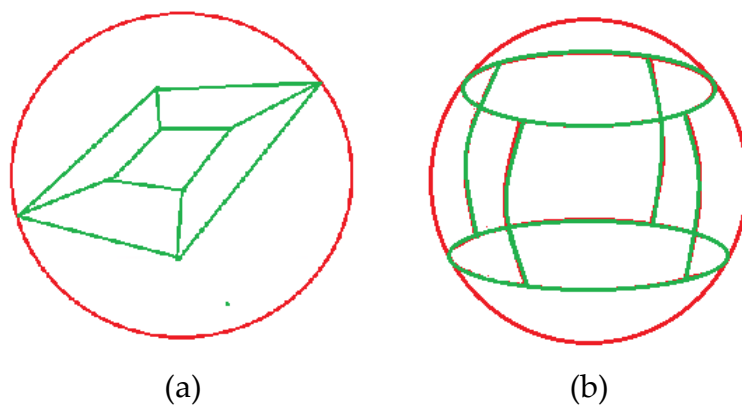


Fig.7

Il difetto angolare del cubo è invariante (4Piatti) sia che il cubo sia gonfiato in una sfera che se il cubo è appiattito come una sogliola.

Non sarebbe così strano. Con questa manovra non abbiamo perduto nessuna faccia (una è rimasta al di sotto) e tanto il poligono superiore quanto quello inferiore hanno un difetto angolare di 2Piatti. Totale 4 Piatti. Misurando in angoli piatti, l'angolo totale deve essere:

$$2(L-F)\text{Piatti}=(2V-4)\text{Piatti}$$

$$L-F = V-2$$

E con questo abbiamo dato ragione della formula di Eulero, come somma degli angoli "interni" del poliedro, eguagliata al totale possibile (2 Piatti per vertice) meno il difetto "sferico" di 4Piatti. **E l'abbiamo estesa al piano senza far piovere formule dal cielo, scavare buchi o introdurre facce fantasma.**

Non solo, ma per il nostro solido soggliola a due facce abbiamo *dimostrato* (due Piatti per una faccia e due Piatti per l'altra faccia identica sottostante) il valore del difetto angolare, e quindi lo abbiamo anche dimostrato per i solidi non soggliole, cioè per tutti i poliedri, regolari e non, perché tutti si possono ridurre a una simile soggliola – ciò che in fin dei conti fece anche Cauchy nel 1811.

Euristicamente potremmo aggiungere che il difetto angolare è eguale alla somma degli angoli esterni del solido. Ma la sfera appiattita diventa un cerchio, che contribuisce 2 angoli piatti (faccia superiore) più 2 angoli piatti (faccia inferiore) = 4 angoli piatti, come tutti i poliedri in tre dimensioni.

Noto che questa idea di risolvere una superficie curva in un mosaico di facce piane, basandosi sul fatto che in generale il difetto angolare è immutato, è alla base del "Regge Calculus", da Tullio Regge (1931-2014), il maggior fisico teorico italiano della seconda metà del Novecento. Il Regge Calculus fu alla base dell'escursione di Tullio Regge nel campo della Relatività Generale.

NOTA

Una curiosità che si rivela eventualmente essere qualcosa di assai più profondo, è una regoletta per ricordare i segni.

Topologicamente parlando, i solidi si dividono in classi i cui membri sono deformabili l'uno nell'altro e hanno le stesse proprietà topologiche, a seconda del valore di una certa quantità detta "caratteristica", e tradizionalmente indicata con χ . L'abbiamo già incontrata nel teorema di Cartesio-Eulero: è il numero 2 che compare nell'espressione $F+V=L+2$.

Ora, sia $k(0)$ il numero di elementi adimensionali, cioè punti o vertici; $k(1)$ il numero di elementi unidimensionali, cioè lati; $k(2)$ il numero di elementi bidimensionali (le facce). Una superficie è bidimensionale e i sottospazi con due dimensioni hanno il numero massimo di dimensioni compatibile con la superficie. Ma, se passassimo a solidi

tridimensionali in tre dimensioni avremmo anche un $k(3)$, e in quattro dimensioni avremo un $k(4)$ e via dicendo.

Si può dimostrare in generale che la caratteristica è data da:

$$\chi = k(0) - k(1) + k(2) [\dots - k(3) + k(4)\dots]$$

in cui gli elementi con un numero pari di dimensioni entrano con segno positivo, quelli con un numero dispari di dimensioni con segno negativo. Nel nostro caso la caratteristica vale 2. Se vogliamo applicare la regola a superfici bidimensionali, possiamo quindi scrivere:

$$2 = V - L + F [\dots - k(3) + k(4)\dots]$$