# Introduzione alla matrice e al determinante HESSIANO

## 2nd Edition

Fotografia di Ludwig Otto Hesse (1811-1874), circa 1860

*https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/65/Ludwig_Otto_Hesse.jpg*
*See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons*

I.

Come ben sanno gli studenti dei primi due anni di analisi matematica, Wronskiano, Jacobiano e Hessiano sono i nomi di tre determinanti e matrici, che furono inventati nel diciannovesimo secolo, per rendere la vita facile ai matematici e per fornire incubi al mondo degli studenti di matematica.

II.

Non so come lo Hessiano sia venuto alla mente di Ludwig Otto Hesse (1811-1874), un tranquillo professore, padre di nove figli, nato a Koenigsberg (penso che Koenigsberg abbia dato alla luce un numero sproporzionato di uomini famosi) . È possibile che stesse studiando il problema di trovare i massimi, i minimi e altri punti anomali su una superficie bidimensionale. (Un'ipotesi alternativa verrà presentata nella sezione X.)

Nel perseguire tale studio, *in una variabile*, si cercano prima i punti in cui la prima derivata è zero (*se esiste affatto*), e poi si esamina la seconda derivata in ognuno di quei punti, per scoprirne la "qualità", se esso sia un massimo, un minimo o un punto di flesso. La varietà di anomalie su una *superficie bidimensionale* è maggiore rispetto a una linea monodimensionale e sono necessari strumenti matematici più potenti. Tuttavia, anche in due dimensioni si inizia cercando i punti in cui le due prime derivate parziali, rispetto a x e rispetto a y, esistono e sono entrambe zero. Un punto sulla superficie in cui entrambe le prime derivate parziali sono zero è chiamato "**punto critico**". Si deve quindi indagare sulla natura dei punti critici, se siano massimi, minimi, punti di sella o qualsiasi altra cosa.

III.

Per introdurre il concetto di "Hessiano" mi accontenterò di un approccio euristico attraverso lo sviluppo in serie di Taylor in due variabili.

In una variabile, lo conosciamo:

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(a)\,(\Delta x)^2 \ldots$$

Per la nostra discussione sullo Hessiano non avremo bisogno di nulla più del secondo grado, e quindi ci fermeremo qui. Naturalmente la funzione che esaminiamo può comprendere potenze di grado superiore di x e y, o anche funzioni trascendenti, ma, come con le funzioni di una variabile, investigare i termini contenenti le seconde derivate  sarà sufficiente, nella maggior parte delle situazioni.

Per completezza esporrò qui un metodo euristico, non rigoroso, per sviluppare una funzione in serie di Taylor.

Sia una funzione f(x) che vogliamo approssimare in serie di Taylor. In realtà l'idea è di approssimare la funzione per mezzo di un polinomio, aggiungendo  termini di grado superiore l'uno dopo l'altro,  fino a che il polinomio eventualmente diverrà un a serie infinita.

Il polinomio (costante)

$p_0(x) = f(a)$

ha lo stesso valore di f (a) nel punto a.  Cerchiamo ora di perfezionare il polinomio in modo che abbia  anche  la derivata prima eguale a quella della funzione, sempre nel punto x= a.

A tal scopo aggiungiamo un termine generico di primo grado ed eguagliamo le derivate prime.

$p_1(x) = f(a) + B\,(x-a)$

Da cui

$p'_1(a) = B = f'(a)$

Ora aggiungiamo un termine di secondo grado, e imponiamo che in x=a siano eguali le derivate seconde  di

$$p_2(x) = f(a) + f'(x-a) + C\,f''(x-a)^2$$

Cioè

$$p''_2(a) = 2C = f''(a)$$

Il nostro polinomio è ora:

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\,f''(a)(x-a)^2$$

Continuando ad aggiungere termini al polinomio avremo dapprima un termine in cui

$$p'''_3(a) \ = 3 \cdot 2D \ = \ f'''(a)$$

E poi gli altri, fino all'infinito. Possiamo anche porre $(x - a) = \Delta x$, da cui

x = $a + \Delta x$ e infine :

$$f(a + \Delta x) = \ f(a) + \ f'(a)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(a)\,(\,\Delta x)^2 \ldots$$

Il rigore di queste derivazioni, tanto della serie di Maclaurin quanto della serie di Taylor è nullo, ma il risultato è valido e il metodo lascia quanto meno un'idea, che forse guidò gli scopritori ai loro sviluppi. Si noti che in questo procedimento furono introdotte idee quasi nuove o nuove del tutto:

1) che esistessero ed avessero senso polinomi infiniti;

2) che un **polinomio** che in un punto avesse tutte le derivate eguali a quelle di una **funzione** data, l'avrebbe approssimata anche in punti assai lontani da quello di partenza, ipotesi non intuitiva e non banale.

*Ad abundantiam* riporto una figura da cui si vede come i vari termini di grado crescente progressivamente aggiunti rendono il polinomio sempre più prossimo alla funzione (qui exp(x))

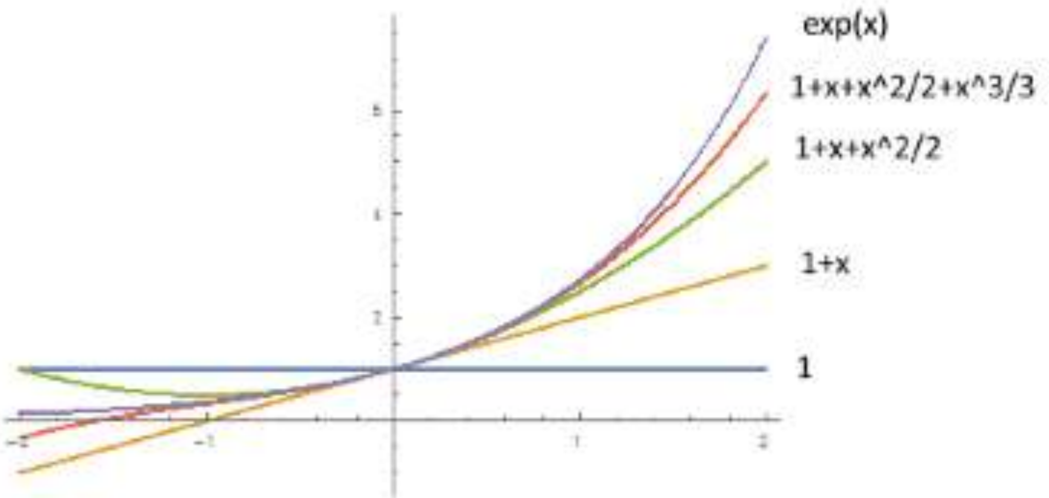


Fig.0, made with Wolfram Mathematica

In due variabili, lo sviluppo nell'intorno di un punto di coordinate (a, b) è un poco più complicato.

Sviluppiasmo una funzione in due variabili, f(x, y) intorno ai punti a, b. Procedendo come nel caso di una variabile abbiamo anzitutto che deve essere $f(a,b) = p_0(x,y) = costante$

Ora aggiungiamo un termine di primo grado ed imponiamo che siano eguali le derivate prime in a. Però i termini di primo grado sono due, B(x-a) e C(y-b). Imponiamo cioè che

$f(x,y) = A + B(x-a) + C(y-b)$

Facendo le derivate , e calcolandole nei punti a, b

B = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}$ and C = $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b}$

Di cui ci dimenticheremo presto perché (come nel caso di una sola variabile) troveremo i "punti critici" della funzione proprio imponendo che le due derivate prime valgano 0.

Si tratta ora di calcolare le derivate seconde del termine

$D\ (x-a)^2 + E\ (x-a)(x-b) + F\ (y-b)^2 \ldots$

Nel punto x = a, y = b.

Per prima cosa si calcola la derivata seconda rispetto a x del primo termine, che ci dà 2D, da cui:

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}$$

La derivata seconda rispetto a y del termine in F è 2F, per cui

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b}$$

Resta il termine E, che va calcolato in due tempi (in cui fortunatamente l'ordine è irrilevante).

Calcolando dapprima la derivata prima rispetto a x, si ottiene

$\frac{\partial (x-a)(y-b)}{\partial x} = E\ (y-b)$

E calcolando la derivata prima di E(y-b) rispetto a y si ottiene E, Noi poniamo questa costante eguale alla derivata seconda di f(x.y) rispetto a x e y, calcolata nel punto (a, b) ottenendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} = E$$

Procedendo in questo modo, taluni trovano diffcile comprendere perché le varie derivate della funzione vadano calcolate nel punto (a, b). Ma questa era proprio il programma di partenza: creare un polinomio, anche di grado infinito, per il quale tutte le derivate sono eguali a quelle della funzione nel punto dato (a, b). Se infatti si calcolano ad esempio le derivate seconde del polinomio, si vede che esse sono eguali alle derivate seconde della funzione nel punto (a,b) perché tutte le derivate seconde dei termini di grado superiore del polinomio contengono dei termini (x-a) o (y-b) che divengono 0 quando x=a e/o y =b.

Abbiamo quindi lo sviluppo:

$f(x,y) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b}(y-b) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b}\ (x -$

*a)2+∂∂x∂f∂ya,bx−a(y−b)+12 ∂∂y∂f∂ya,b (y−b)2 …*

Resta solo un passo da fare: notare che possiamo scrivere, per incrementi relativamente piccoli: x-a = $\Delta x, cio$è $x = a + \Delta x$ , e similmente y-b = $\Delta y, cio$è $y = b + \Delta y$.

A questo punto, portando f(a, b) a primo membro, ed avendo posto eguali a

Zero le derivate prime per trovare, come nel caso di una variabile, i punti critici, il nostro sviluppo intorno a un punto critico di coordinate (a, b) sarà:

(1) $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a,b) =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} \Delta x^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} \Delta x\, \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} \Delta\, y^2$

Tutte le derivate sono calcolate al punto di coordinate x =a, y = b, e perciò sono numeri ordinari.

E ci fermiamo qui come promesso, e non includiamo nella nostra analisi i termini di ordine superiore. Nella maggior parte dei casi non sono necessari.

IV.

Come si è detto, se sviluppiamo la nostra funzione in prossimità di un "punto critico", i termini contenenti le prime derivate identificano il punto critico essendo posti eguali a zero.

Ad esempio, per la funzione $z = x^2 - y^2$, dobbiamo porre le derivate prime uguali a zero, ottenendo in tal modo 2x = 0 e 2y = 0, cioè, che il punto (a= 0,b =0), il punto critico, è l'origine.

Possiamo ora considerare f (x, y) come l'equazione di una superficie in due dimensioni, e esaminando le proprietà del secondo membro dovremmo essere in grado di comprendere la forma della superficie nelle vicinanze del punto critico. Giusto, ma come si fa?

## V. Forme quadratiche e matrici simmetriche associate.

In generale un'espressione del tipo:

$$Q(u,v) = Au^2 + 2C\,u\,v + Bv^2$$

(che può essere estesa a n variabili, a condizione che tutti i termini siano di secondo grado) è chiamata una "forma quadratica" e ha molte applicazioni teoriche e pratiche. Nel nostro caso è associata a una matrice simmetrica, come si può vedere sviluppando il prodotto

$$(u\,,v)\begin{pmatrix}A & C\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = (u\,,v)\begin{pmatrix}Au+Cv\\ Cu+Bv\end{pmatrix} = Au^2 + 2C\,u\,v + Bv^2$$

Hesse deve aver riconosciuto il membro di destra della (1) come la forma quadratica risultante dal prodotto di una MATRICE simmetrica (HESSIANA) per un vettore bidimensionale $\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$ e per il suo trasposto $(\Delta\, x\,, \Delta y)$

(il tutto moltiplicato per ½, un fattore che d'ora innanzi ometteremo).

Con "ovvia" notazione per le derivate seconde $(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy})$ otteniamo:

$$(\Delta x\,, \Delta y)\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = f_{xx}\,\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\,\Delta y + f_{yy}\Delta y^2$$

Una certa confusione sorge inevitabilmente quando si parla di "Hessiano". Generalmente significa la matrice di Hesse $((H(f(x,y)))$, ma molti studenti ai primi passi, non senza ragione, pensano che si stia parlando del determinante di Hesse,

$$Det(H(f(x,y)) = \begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2$$

che finora non è ancora entrato in gioco. Il suo turno arriverà, però.

Lasciamo da parte per un momento il determinante. Abbiamo

$$(1b) \qquad \Delta f = f(\mathrm{a} + \Delta x, \mathrm{y} + \Delta y) - f(a,b)$$
$$= +\frac{1}{2}\left( f_{xx}\;\Delta\, x^2 + 2\, f_{xy}\Delta\, x\,\Delta y + f_{yy}\;\Delta y^2\right)$$

il che significa che se la "forma quadratica", che abbiamo a secondo membro è sempre **positiva**, in qualsiasi direzione ci allontaniamo dal punto critico delle coordinate a e b, cioè quali che siano le componenti $\Delta x$, $\Delta y$, abbiamo che $\Delta f$, la differenza tra il nuovo valore $f(\text{a} + \Delta x, \text{y} + \Delta y)$ e la funzione nel punto critico ($f(a,b)$), è positiva. In altre parole, $f(\text{a} + \Delta x, \text{y} + \Delta y)$ è sempre "sopra" $f(a, b)$, che è quindi un minimo.

D'altra parte se la forma quadratica a secondo membro è sempre **negativa**, in qualsiasi direzione ci spostiamo dal punto critico, abbiamo che la differenza tra il nuovo valore $f(\text{a} + \Delta x, \text{y} + \Delta y)$ e la funzione nel punto critico è negativa, cioè $f(\text{a} + \Delta x, \text{y} + \Delta y)$ è sempre "più in basso" di $f(a, b)$, che è quindi un massimo.

Per lo stesso ragionamento, se in qualche direzione la forma quadratica è negativa e in altre direzioni è positiva, abbiamo un "punto sella".

Infine, se la forma quadratica è uguale a zero, non possiamo arrivare a nessuna conclusione e dobbiamo approfondire la nostra analisi, un compito che non svilupperemo completamente.

Una domanda che potrebbe sorgere è come dedurre la forma quadratica dalla matrice simmetrica e viceversa. Finché lavoriamo in due dimensioni, le risposte possono essere fornite quasi con una semplice ispezione. Se ci spostiamo verso una dimensione superiore, il "viceversa" è ancora facile: si moltiplica la matrice a destra per il vettore-colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ e a sinistra per il vettore trasposto (riga) (x, y, z, u ...)

Passare dalla forma quadratica alla matrice associata è altrettanto facile. Si deve solo ricordare che la forma quadratica è data da

$$\text{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) = \sum_1^n a_{rs}\, x_r x_s$$

(in cui i coefficienti $a_{rs}$ sono gli elementi di matrice) e riordinare i coefficienti. (È utile ricordare che la matrice è più semplice da usare se è simmetrica).

**Esempio:**

Supponiamo di voler trovare la matrice associata alla forma quadratica

$$Q\,(x, y) = x^2 + 2\,xy - 3yx + 3y^2$$

Ribattezzando x = $x_1, y = x_2$,, possiamo scrivere

$$Q(x_1, x_2) = 1\,x_1\,x_1 + 2\,x_1x_2 - 3x_2x_1 + 3\,x_2x_2$$

Da cui: : $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = -3, a_{22} = 3$

La matrice è quindi,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

che non è simmetrica. Tuttavia, -3yx + 2xy = - xy e uno può dividere imparzialmente -1 = -0.5 - 0.5, ottenendo così

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

che ci restituisce la forma quadratica

$$Q(\,x,y) = x^2 - xy + 3y^2\ .$$

In effetti si può generalizzare l'esempio dando la prescrizione che sia

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

Se $a_{ij} = \ a_{ji}$ fin dall'inizio, *"tant mieux"*, come direbbe un francese.

VI.

Quindi la domanda è ora, come decidiamo il comportamento del termine a destra of 1b? Un metodo potrebbe essere per "forza bruta", che consiste nel tracciare un (ragionevolmente piccolo cerchio *(per non includere altri punti critici)* centrato sul punto critico in questione, calcolare il valore di $f\,(x,\, y)$ per quanti più punti del cerchio possibile, e confrontare i valori ottenuti con il valore della funzione nel punto critico. Sapremmo allora se abbiamo a che fare con un massimo, un minimo o un punto di sella (e potremmo anche risolvere la situazione incerta che abbiamo visto, quando la forma quadratica è eguale a zero.).

Il risultato ideale sarebbe allora quello di far vedere come si possa dimostrare che una forma quadratica ha sempre un valore positivo o negativo, quali che siano le direzioni dei vettori ($\Delta x\,\vec{\imath}$ , $\Delta y\,\vec{\jmath}$), dal punto critico, senza dover calcolare i valori della forma quadratica punto per punto.

VI.

Ciò è possibile, e qualche nozione della teoria degli autovalori ci aiuterà a capire il trucco. Affronterò come esempi solo matrici 2 x 2. Si può dimostrare che una matrice 2 x 2 simmetrica ha sempre autovalori reali, che si trovano ricordando il significato più importante di **autovalori** **e** **autovettori** di una matrice, come ad esempio:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

*Se moltiplichiamo una matrice per un vettore di componenti* $\binom{x}{y}$*, in generale troviamo un differente vettore. Tuttavia, ci sono casi in cui troviamo lo stesso vettore, almeno in direzione,* anche se abbreviato o allungato di un fattore tradizionalmente chiamato $\lambda$, l'autovalore. Un tale vettore è chiamato autovettore. Per trovarlo, dobbiamo quindi risolvere il semplice sistema algebrico

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

che, per una matrice simmetrica, diventa:

$$\begin{cases} ax + cy = \lambda x \\ cx + \ by \ = \lambda y \end{cases}$$

Così (x, y) diventa (λx, λy), cioè, lo stesso vettore allungato - o accorciato - di un fattore $\lambda$.

Il sistema algebrico di primo grado diventa prontamente:

(2)

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + cy = 0 \\ cx + (\ b-\lambda)y \ = 0 \end{cases}$$

Ora abbiamo un sistema omogeneo e il determinante dei coefficienti di x, y, deve essere 0, altrimenti avremo un'unica soluzione. Tale soluzione, essendo unica, può essere solo l'inutile (x = 0, y = 0), che effettivamente soddisfa il sistema. Il determinante dei coefficienti risulta nell'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - \ c^2 = 0$$

Qui vediamo che il discriminante dell'equazione è

$$[-(a+b)]^2 - \ 4a\,b + 4c^2 \ = (a-b)^2 + \ 4c^2$$

ed è sempre positivo, il che garantisce che la nostra equazione ha radici reali. Ciò è dovuto alla simmetria della matrice. Le due radici reali che otterremo rendono il determinante uguale a zero, che è quel che vogliamo, al fine di avere soluzioni non banali.

Dell'equazione di cui sopra sarà utile ricordare che:

$$\lambda_1\lambda_2 = ab - c^2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = +(a+b)$$

VII.

Avendo trovato i due autovalori reali ( $\lambda_1, \lambda_2$ ),, possiamo sostituirli nella (2), ottenendo così due autovettori ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$), che possono essere normalizzati dividendo ciascuno di essi per $\sqrt{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ , un prodotto che taluni chiamano Norma, mentre altri chiamano Norma il suo quadrato. È solo questione di nomi.

Sebbene, una volta noti gli autovalori, non sia difficile calcolare i due autovettori, ho visto molti studenti in difficoltà di fronte a questo problema. Eppure, partendo da una qualsiasi delle due equazioni (non importa quale, perché, siccome il determinante del coefficiente, una volta che gli autovalori sono inseriti, è zero, le due equazioni sono equivalenti) abbiamo che

$$(a-\lambda)x + cy = 0$$

L'equazione è soddisfatta, ad esempio, prendendo

$$\frac{x}{y} = -\left(\frac{c}{a-\lambda}\right)$$

Ne segue che:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}$$

Il cui prodotto interno è dato da

$$c^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = c^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2) + a^2$$

Ora, utilizzando le espressioni per $\lambda_1\lambda_2$ and $(\lambda_1 + \lambda_2)$ date più sopra:

$$= c^2 + (ab - c^2) - a\,(a + b) + a^2 = 0$$

Quindi i due autovettoripossono essere presi come una nuova base ortonormale dello spazio in 2 dimensioni.

Ferma! Direbbe qui il discente pignolo e pigro. Va bene l'ortogonalità, ma come si assicura la normalità? La normalità la fissiamo noi dividendo il vettore per la sua norma ( o la sua radice quadrata, a seconda delle convenzioni che decidiamo di seguire) , in modo che moltiplicandolo per se stesso, o meglio per il suo trasposto, otteniamo 1.

Quindi per "normalizzare" il vettore $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ si esegue il prodotto interno

N = $(u_1\,, u_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2$, se ne estrae la radice quadrata e si divide il vettore originale per essa, ottenendo il vettore normalizzato

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Che, moltiplicato per il suo trasposto,

$$(U_1, U_2) = \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}(u_1\,, u_2)$$

Porge

$$\frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}(u_1 \, , u_2) \, \frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \; = \; \frac{u_1^2+u_2^2}{u_1^2+u_2^2} = 1$$

Cioè, $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ è normalizzato. D'ora in avanti assumeremo in generale che i nostri autovettori siano normalizzati.

Pertanto, nella nuova base:
(i) *Una matrice simmetrica 2 x 2 M può assumere una forma diagonale (in cui i due termini diagonali sono gli autovalori (reali)).* È facile mostrare perché.
Abbiamo che

$$\mathrm{M}\, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \lambda_1 \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$$
$$\mathrm{M}\, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = \lambda_2 \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$$

E quindi, moltiplicando la prima equazione a sinistra per $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} M \, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \, \lambda_1 \, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$$

Il primo membro è $M'_{1\,1}$, il nuovo elemento (1,1) della matrice M nella nuova base. A secondo membro abbiamo

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \, \lambda_1 \, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \; = \; \lambda_1 \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$$

perché $\lambda_1$ è solo un numero e può essere inserito prima o dopo il vettore che esso moltiplica. Inoltre, $\vec{v}_1$ è normalizzato, e quindi abbiamo $\vec{v}_1 \vec{v}_1 = 1$ e

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \, \mathrm{M} \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = M'_{11} = \lambda_1$$

Poiché gli autovettori sono ortogonali, oltre ad essere normalizzati, abbiamo anche:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \, \mathrm{M} \, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = M'_{\mathbf{12}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \, \lambda_1 \, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

Operando allo stesso modo su

$$\mathrm{M}\,\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \lambda_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2$$

Con $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$ a sinistra, otteniamo finalmente la forma diagonale nella nuova base:

$$\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Se si guarda indietro con "occhi diversi", si vede che abbiamo eseguito pezzo per pezzo una trasformazione di una Matrice, che, mettendo tutto insieme, è:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\vec{v}_1} \\ \boxed{\vec{v}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\vec{v}_1} & \boxed{\vec{v}_2} \end{pmatrix}$$

dove le scatole sono i nuovi vettori-base a due componenti, in verde i vettori, in rosso i loro vettori trasposti o "duali".

Vale forse la pena ricordare che il vettori base che si utilizzano implicitamente (generalmente senza rendersene conto) quando si scrivono gli elementi di una matrice 2x2 generica M sono

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ad esempio,

$$(1, 0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{0}{1} = (1,0) \binom{b}{d} = b, \text{cioè } M_{12}$$

**Ma ora siamo finalmente giunti al punto principale della discussione:**

(ii) *Tutti i vettori in due dimensioni possono essere espressi in termini dei due autovettori* poiché i due autovettori formano una base ortonormale. Dobbiamo solo sviluppare i vettori unitari , $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ e $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ della vecchia base in termini della nuova base $\vec{v}_1$and $\vec{v}_2$, come segue:

$$\vec{\boldsymbol{\imath}} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\vec{\boldsymbol{v}}_2$$
$$\vec{\boldsymbol{\jmath}} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\vec{\boldsymbol{v}}_2$$

Se noi scegliamo il nostro vettore di spostamento come
$\Delta\vec{r} = \vec{\boldsymbol{\imath}}\,\Delta x + \vec{\boldsymbol{\jmath}}\,\Delta y$, esso quindi diventa:

$$\Delta\vec{r} = [(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\vec{\boldsymbol{v}}_2]\,\Delta x + [(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\vec{\boldsymbol{v}}_2]\,\Delta y$$

O anche
$\Delta\vec{r} = [(\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\,\Delta x + (\vec{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\Delta y]\vec{\boldsymbol{v}}_1 + [(\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}})\,\Delta x + (\vec{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}})\Delta y]\vec{\boldsymbol{v}}_2 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$,
da cui si può vedere per ispezione che $c_1$ e $c_2$ sono di fatto le componenti di $\Delta\vec{r}$, lungo la nuova base ortonormale $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$ .

**Ma con una matrice diagonale diventa possibile scrivere la forma quadratica nella cosiddetta "forma canonica".**
Ciò che avviene è che passiamo dal vecchio sistema bidimensionale in cui:

1. La base erano i vettori unitari $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$,

2. La matrice (simmetrica) associate alla quadrica era M = $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

   che risultava nella...

3. …forma quadratica associata *Q(M)* = $ax^2 + 2cxy + by^2$

Al nuovo sistema in cui:

1. La base sono i vettori unitary $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$ ,
2. La matrice simmetrica associata alla quadrica è S′ = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,
3. La forma quadratica associata Q(M′) = $(c_1, c_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$ $\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2$

Pertanto, la forma quadratica associata ha assunto la FORMA CANONICA:

$$\text{(3)} \qquad Q(M') = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2\,.$$

VIII.

Nel caso in esame, quindi, siccome $c_1^2$ e $c_2^2$ sono entrambi numeri positivi, la caratteristica più importante, che è chiamata la "segnatura" ( cioè il segno, sperabilmente costante) della forma quadratica, dipende dagli autovalori della matrice Hessiana: la forma quadratica associata a H, Q ( H), avrà sempre un valore positivo (condizione per un minimo della superficie) se entrambi gli autovalori saranno positivi. Il suo valore sarà sempre negativo se entrambi gli autovalori saranno negativi (condizione per un massimo della superficie)**. In entrambi i casi il loro prodotto, il valore del determinante, sarà positivo. Ma ciò significa che se il determinante Hessiano è positivo sarà sufficiente conoscere il segno di un autovalore per sapere se ci troviamo in una condizione di minimo o di massimo, poiché l'altro autovalore deve avere lo stesso segno.** In questi casi diciamo che la forma quadratica è definita, positiva o negativa, con le conseguenze che abbiamo già menzionato su $f(a, b)$ come minimo o massimo. Se un autovalore è zero, la forma quadratica diventa "semidefinita", positiva o negativa, a seconda del segno dell'altro autovalore.

IX.

Ma cosa succede se gli autovalori hanno un segno diverso? Ricordiamo che , come afferma la (1b) a pag 7, abbiamo:

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[Q(\Delta x, \Delta y)\right]$$

che, ridotta a forma canonica (3), pag.15, può essere riscritta come:

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[Q(c_1,\ c_2)\right]$$

In cui $c_1,\ c_2$ altro non sono che la trascrizione di $\Delta x, \Delta y$ nel nuovo sistema di coordinate.

Possiamo quindi studiare senza perdita di generalità la funzione

$$z = 2\Delta f = |\lambda_1|U^2 - |\lambda_2|W^2$$

In cui appare un irrilevante fattore 2.

Per z = 0, cioè sul piano passante per il punto critico, abbiamo due linee rette attraverso l'origine del piano (U, W), una caratteristica comune quando l'origine è un punto di sella; per $z\ (= 2\Delta f) < 0$ abbiamo un'iperbole, e la nostra superficie inizia a modellarsi. Per z >0 abbiamo ancora un'iperbole, ma orientata ortogonalmente alla prima.

Possiamo infine studiare i casi U =0 e W= 0. Nel primo caso abbiamo la curva z $=-|\lambda_2|W^2$, una parabola convessa; nel secondo caso abbiamo z $=|\lambda_1|U^2$, una parabola concava. (Vedi Fig.1).

## Tre esempi

**A. La forma quadratica z = x² - y²**. Il punto critico è l'origine, perché $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ = 2y = 0, da cui x = y = 0. Ma, ora, occorre intelligenza. La forma quadratica è già in forma canonica e, calcolando le derivate seconde, possiamo facilmente scrivere il determinante Hessiano come:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Le due equazioni agli autovalori sono

$$\begin{cases} (2-\lambda)\,x = 0 \\ -(2+\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Il determinante vale $-(2-\lambda)(2+\lambda) = 0$, che ci dà le due radici, che avremmo potuto indovinare mentre scrivevamo il determinante. Così pure gli autovettori sono evidentemente orientati lungo gli assi ortogonali y =0 e x =0, cioè gli assi ortogonali usuali. Il determinante è negativo e quindi abbiamo a che fare con un punto-sella.

Come è orientata la sella?

Se prendiamo la funzione z(x, y) al valore zero, cioè consideriamo la funzione $z = x^2 - y^2 = 0$, troviamo che z si spezza in due rette che hanno come punto comune l’origine, le cui equazioni sono $y = x$ e $y = -x$, a 45° rispetto agli assi delle coordinate (disegnate in verde nei diagrammi di Fig.1). Dobbiamo ora solo vedere cosa succede lungo gli assi ortogonali: prendiamo ad esempio y. In questo caso troviamo che lungo l'asse y, cioè per $x = 0$, i valori sono $z = - y^2$, una parabola convessa, ovunque negativa (eccetto nell’origine). Lungo l’altro asse, invece, avremo una parabola concava, ovunque positiva (eccetto nell’origine). Possiamo quindi ricostruire la sella: nei settori blu siamo sotto l'origine (punto critico), nei settori rossi siamo sopra l'origine. Nel secondo diagramma le due parabole sono disegnate in viola, le due iperbole in rosso e blu.

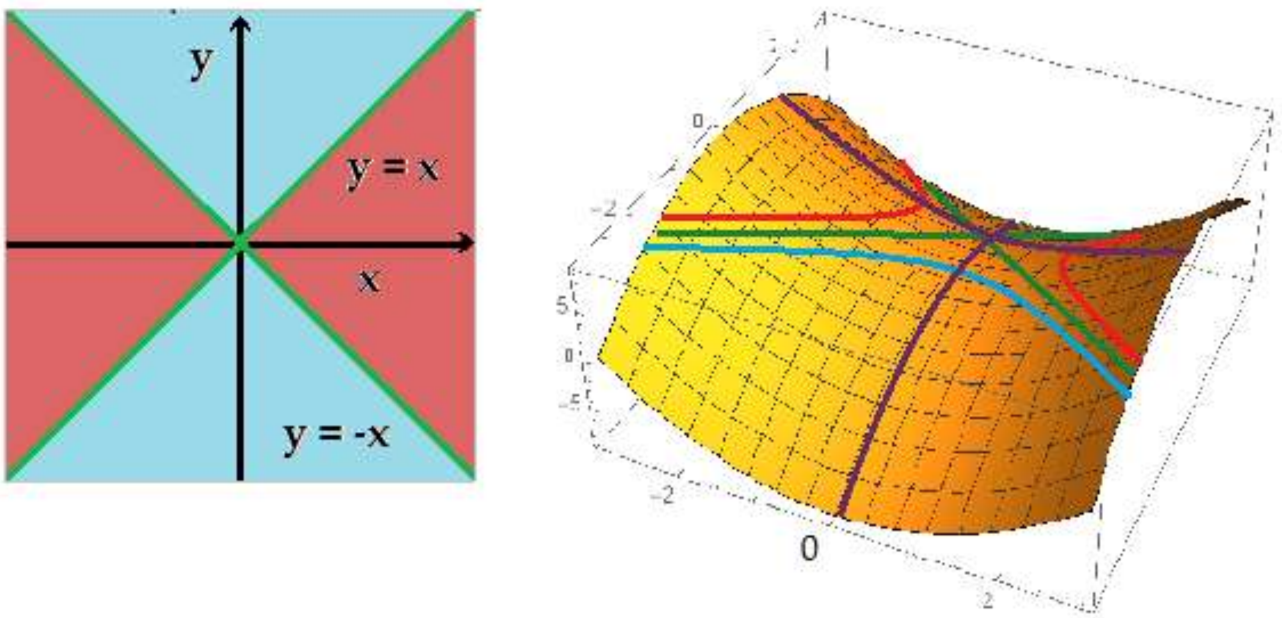


Fig.1 (parzialmente fatta usando il linguaggio Wolfram-Mathematica)

**B. La forma quadratica z = $x^2 - \; x\,y + \; y^2$.**

Questa forma è assai interessante , perché la si può ritrovare in diversi problemi. Penso che fosse Poincaré a dire che la Matematica è l’arte di dare lo stesso nome a cose differenti. Di conseguenza, ma questo Poincaré non lo disse, lo stesso “metodo di soluzione” può essere applicato a diversi

"problemi". Ma la frase ha senso anche scambiando le parole "metodi" di soluzione con la parola "problemi": La matematica è quindi anche l'arte di risolvere lo stesso "problema" con diversi "metodi".
La quadratica che vogliamo studiare ci illumina (spero) sul significato degli autovalori e autovettori. Esaminiamo due problemi in cui essa compare.

***(1) Primo problema: piccole oscillazioni di un sistema costituito da due punti materiali connessi da fili elastici.***

Si consideri il sistema oscillante (Fig.2) semplificato al massimo, costituito da due masse puntiformi eguali e collocate, a riposo, su una linea retta in punti equidistanti a distanza 1, e dagli estremi fissi della corda, con costanti di forza elastica eguali . Facciamo anche l'ipotesi che gli spostamenti B e C dalle posizioni di riposo sulla corda orizzontale, (cioè x e y) siano unicamente verticali e piccoli rispetto a 1.

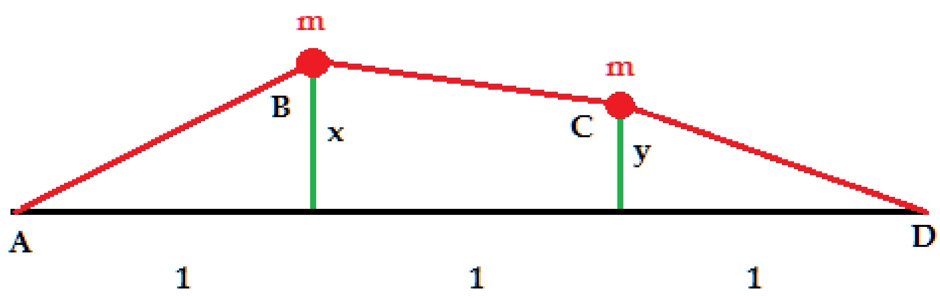


Fig.2

Qual è la fuzione potenziale V(x,y)?.
La trattazione che io trovo normalmente c i dà il potenziale ricavandolo dalla forza attribuita a Hooke, che qui trascrivo in forma generica:

$$F = -k\,x$$

Da cui risulta che il potenziale elastico è dato da:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

Francamente questo metodo non mi piace anche se lo vedo frequentemente usato. Il Landau stesso, nel suo libro "Meccanica" ricava le equazioni di Lagrange ricorrendo ad un'astratta funzione potenziale che, aggiunta alla Lagrangiana della particella libera, ci permetterà di ottenere, ad esempio, le equazioni di Newton. Niente di male in tutto questo, ma se questa astratta funzione potenziale è ricavata dall'espressione della Forza Newtoniana, mi pare che il cane si stia mangiando almeno parzialmente la coda. In altre parole, secondo me dovremmo essere in grado di costruire la Lagrangiana T-V direttamente senza ricorrere a forze Newtoniane, cioè V ci dovrebbe essere dato direttamente dall'esperimento o da qualche ragionamente indipendente. Sfortunatamente contro di me sta Hooke stesso (1678), il quale scrisse "*Ut tensio, sic vis*", cioè, appunto:

$$F = -k\,x$$

Un'osservazione che ho trovato (W.W. Sawyer, "A Path to modern mathematics", libretto aureo) è che l'energia potenziale risiede nell'allungamento totale della corda elastica per passare dalla posizione di riposo alla posizione tesa in figura 2. Stirando la corda elastica l'unico risultato del lavoro fatto è l'allungamento della medesima, per cui non abbiamo altra scelta, per un "*principio di ragion sufficiente*" caro ai matematici del Settecento, che dichiarare che il potenziale elastico della corda allungata sta nel suo allungamento dalla posizione di riposo. La forza elastica tende a decrescere la lunghezza della corda elastica allungata a causa dello spostamento delle masse, per riportarla alla lunghezza iniziale (inizialmente L = 3). La lunghezza totale, dopo l'allungamento è:

i) Per il tratto AB: $\sqrt{1+x^2}$, che per x piccola si riduce (sviluppo in serie!) a

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

ii) Per il tratto BC: $\sqrt{1+(x-y)^2}$, che per piccoli spostamenti si riduce a

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}(x-y)^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$$

iii) Per il tratto CD: $\sqrt{1+y^2}$, che per piccoli spostamenti si riduce a

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2}y^2$$

L'allungamento totale (a cui il potenziale elastico sarà legato da qualche costante misurata in opportune unità) è

$$a_1 + a_2 + a_3 - 3 = \boldsymbol{x^2 - x\,y + y^2}.$$

***(2) Secondo problema: moto di un punto materiale che scivola senza attrito in una bacinella sotto l'effetto della gravità.***

La forma della bacinella è a nostro piacere, e noi, seguendo il Sawyer, possiamo

(1) definire una funzione z (x, y) , per esempio

$$\boldsymbol{z = x^2 - x\,y + y^2}$$

(2) disegnare due assi ortogonali sul piano e poi in ogni punto (x,y) alzare un segmento di retta di altezza z, perpendicolare al piano.

(3) stendere una superficie flessibile sui punti, numerosi quanto possibile, che abbiamo così costruito.

Ne risulterà una bacinella non troppo strana: si tratta di un ellissoide parabolico i cui assi principali ( rosa e azzurro in Fig.3) sono orientati a 45° rispetto agli assi ortogonali (x,y), come mostra la loro proiezione sul piano. Si notino i due archi POQ (rosa e rossa) e MON (blu) , che si proiettano sugliassi principali dell'ellissoide. Questi archi sono anche orientati secondola massima pendenza della superficie.

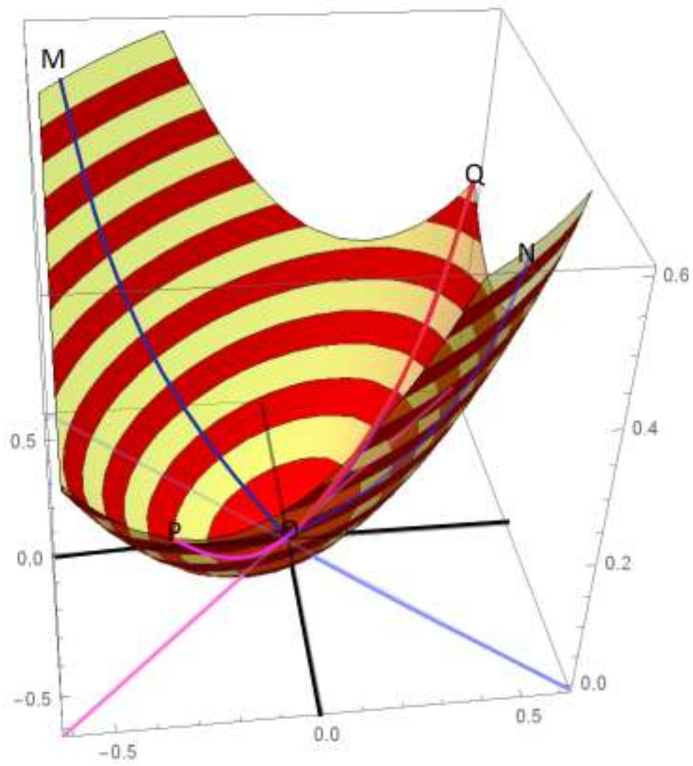


Fig.3

Viste in pianta, le curve di livello della bacinella, sezionata a z = 2, appaiono come:

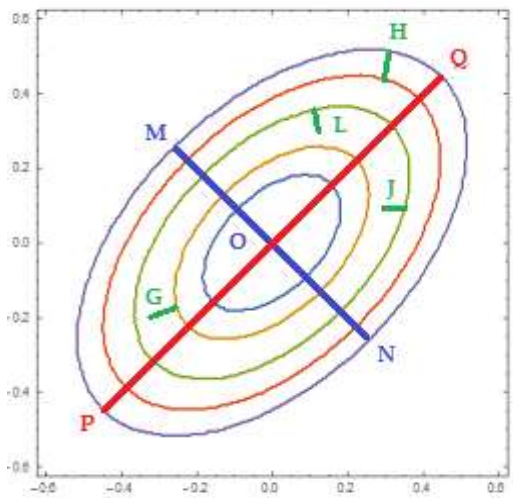


Fig.4

Supponiamo di lasciar partire una particella pesante da un generico punto H. Essa scivolerà lungo le linee di massima pendenza, le quali, come sappiamo

dal saggio sul gradiente,
(http://dainoequinoziale.it/sassolini/2017/07/04/normalegradiente.html)
sono in ogni punto perpendicolari alla curva di livello passante per quel punto (le curve di livello sono qui tutte ellissi tracciate in diversi colori). Se il punto parte da H, la sua traiettoria è complicata , dovendosi mantenere perpendicolare alle curve di livello in ogni punto. Lo stesso vale per le traiettorie partenti dai punti G, J, L. In assenza d'attrito la particella pesante risalirà dall'altra parte della bacinella alla stessa altezza, per poi ridiscendere nel suo complicato **moto oscillatorio**: in generale la particella pesante non risalirà al punto di partenza H.

Tuttavia vediamo che ci sono due moti particolarmente semplici, il moto lungo MON ed il moto lungo POQ, Queste due traiettorie, che si proiettano in due segmenti di retta sul piano (x,y) sono in ogni punto perpendicolari alle curve di livello, e perciò le proiezioni del moto lungo di esse saranno due oscillazioni armoniche in linea retta. Ma non dobbiamo aspettarci due frequenze eguali, perché la traiettoria lungo MON è più ripida e quindi più rapida a compiersi di quella lungo POQ, ha cioè un periodo di oscillazione inferiore.

*Tuttavia, l'utilità degli autovettori e degli autovalori è che quasiasi moto oscillatorio nella bacinella ellissoidale considerata, per complicato che possa essere, potrà essere decomposto in due moti rettilinei di opportuna frequenza.* Questi due movimenti particolarmente semplici, sono detti i Modi Normali dell'oscillazione, e si comportano come i due vettori ortornormali di un sistema bidimensionale. Ogni altro vettore del sistema può essere espresso in termini delle sue componenti lungo tali vettori base.

La matematica che abbiamo studiato dovrebbe confermare queste osservazioni qualitative.

Per vederlo, dobbiamo diagonalizzare la matrice che origina la forma quadratica, trovare gli autovalori (legati , come vedremo, alle frequenze) e gli autovettori (legati alla natura dei due moti più semplici o Modi Normali), che - come ormai si è detto e ripetuto - potranno essere usati come vettori base per descrivere ogni moto più complicato.
La matrice da cui deriva la forma quadratica è:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0.5} \\ \mathbf{-0.5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

come può essere subito dimostrato eseguendo la moltiplicazione

$$(\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}) \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gli autovalori si calcolano altrettanto rapidamente particolarizzando e ponendo eguale a zero il determinante dei coefficienti della (2):

$$\begin{cases} (1-\lambda)\mathrm{x} - 0.5\, y = 0 \\ -0.5\, \mathrm{x} + (1-\lambda)\mathrm{y} = 0 \end{cases}$$

Eseguendo i facili calcoli si trova:

$$\lambda_1 = 1.5, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = 0.5, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si vede dunque che l'autovalore maggiore, che, come vedremo, corrisponde alla frequenza maggiore, è orientato da Nord-Ovest a Sud-Est con pendenza di 45 gradi (la traiettoria MON), l'autovalore più piccolo da Nord-Est a Sud-Ovest (la traiettoria POK) come annunciato.

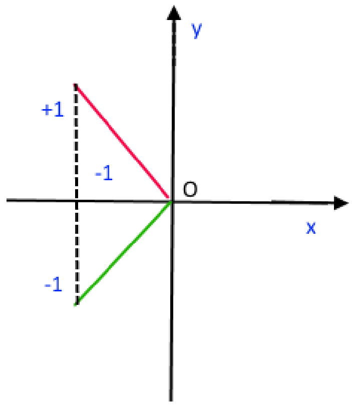


Fig.5

Dai valori delle componenti (x, y) degli autovettori si vede che esse sono eguali per $\vec{v}_2$ e opposte per $\vec{v}_1$.

**Se ora abbandoniamo per un momento la bacinella ellittica e torniamo al nostro sistema oscillante di Fig.2,** in cui x, y non sono le *coordinate* di un singolo punto, ma le *ordinate* di due punti diversi, la matematica essendo la stessa, vediamo che i due autovettori, o Modi Normali delle oscillazioni, hanno ordinate x, y opposte in nel caso dell'autovalore maggiore, ed eguali nel caso dell'autovalore minore.

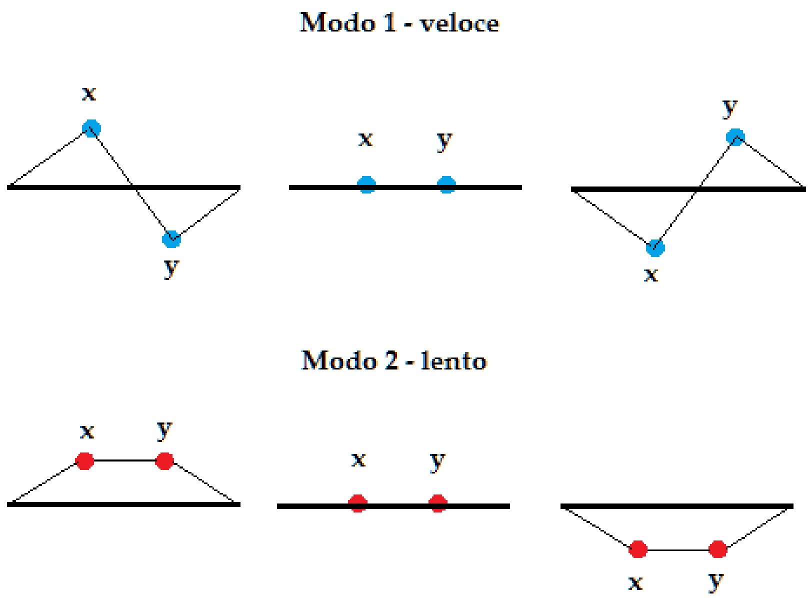


Fig.6

Non ci si dovrebbe stupire del fatto che il secondo modo abbia una frequenza di oscillazione inferiore a quella del primo. Infatti, nel modo normale più veloce, le masse puntiformi per eguali |x|e |y|, (eccetto nel caso in cui esse sono allineate) sono sempre da bande opposte della linea di riposo. In altre parole le due masse sono connesse da una corda elastica più allungata, più tesa, e quindi sono soggette a maggiore sollecitazione elastica, il che produce una maggiore frequenza di oscillazione.

**Torniamo alla bacinella.** Per avere un quadro generale dell'andamento delle oscillazioni di una particella pesante occorre solo ricordare come si giunge alle equazioni del moto di due oscillatori accoppiati (che, come abbiamo visto, sono lo stesso problema da un ounto di vista matematico).
Per due oscillatori accoppiati in generale si arriva inevitabilmente alle due equazioni del moto:

$$\begin{cases} ax + cy = \ddot{x} \\ cx + \ by \ = \ddot{y} \end{cases}$$

E qui viene normalmente fatta la vaga affermazione (che ho discusso in http://dainoequinoziale.it/resources/sassolini/leprimequazioni.pdf) che in un sistema lineare del secondo ordine con coefficienti costanti possiamo tentare di trovare una soluzione ponendo

$$x = Ae^{i\omega_1 t}; \ \ y = Be^{i\omega_2 t}$$

A priori, come ho scritto nel saggio citato, non viene citato nessun motivo per farlo, ma almeno sappiamo che il metodo funziona. Con questa posizione si ottiene:

$$\begin{cases} ax + cy = \ -\omega_1^2 x \\ cx + \ by \ = -\omega_2^2 y \end{cases}$$

Che, scrittta in forma diversa, altro non è che

$$\begin{cases} ax + cy = \lambda x \\ cx + \ by \ = \lambda y \end{cases}$$

in cui gli autovalori che troveremo sono i quadrati delle frequenze. Il problema che ci può essere creato dal segno meno può essere aggirato, come sappiamo, usando funzioni trigonometriche, se preferiamo non usare i numeri complessi.

Il moto di un punto R(u, v) la cui componente u oscilla lungo uno degli assi dell'ellisse, mentre la componente v oscilla lungo l'altro asse dell'ellisse, risulta quindi come segue:

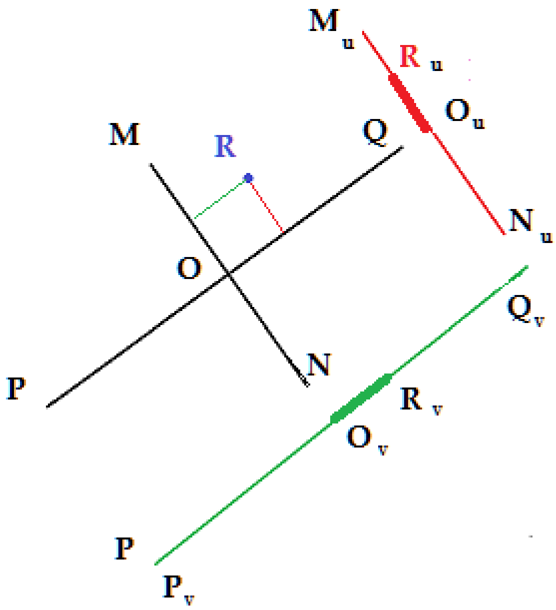


Fig.7

Le coordinate di R, cioè $R_u$ e $R_v$, misurate sugli assi obliqui u e v , con ampiezze di oscillazione pari a ($M_u - N_u$ ed $P_v - Q_v$ ), oscillano con frequenze pari alle radici quadrate degli autovalori trovati (ignorando il segno meno).

Il percorso tracciato da R può assumere forme assai complicate, che portano il nome di **Figure di Lissajous.**

Per dare un esempio di figure di Lissajous, mediante il linguaggio Wolfram Mathematica ho disegnato un rozzo esempio di quello che succede nel nostro caso, quando le frequenze valgono $\sqrt{1.5}$ (con semiasse 0.5 ) e $\sqrt{0.5}$ (con semiasse 1). Siccome il rapporto delle frequenze non è un numero razionale , la curva disegnata non si chiuderà mai. Anzi, a poco a poco "riempirà" il rettangolo di dimensioni 2 x 1, nel senso che il punto R prima o poi passerà infinitamente vicino a qualsiasi punto del rettangolo.
Usando la formula

**ParametricPlot[{Sin[Sqrt[0.5]t+ Pi/2.] ,0.5 Sin[ Sqrt[1.5]t+ Pi/2.]}, {t, 0,20}]**

si ottiene, in 20 unità di tempo, partendo dal punto K, la piccola porzione di percorso:

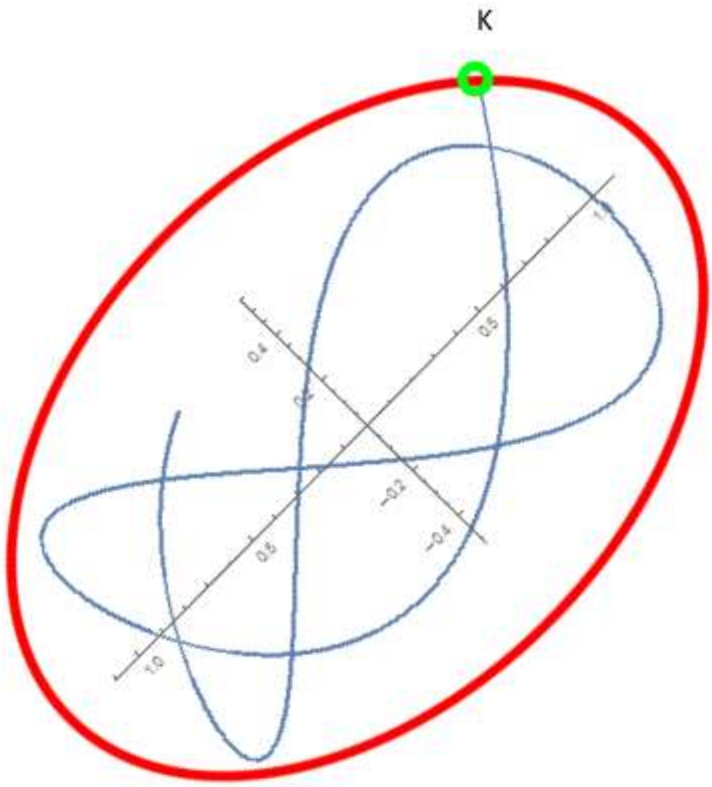


Fig.8

**C. La forma quadratica $z = x^2 + 2\,x\,y + y^2$.**

La matrice simmetrica associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è zero, in quanto la matrice ha due righe (e due colonne) uguali (a parte cil fatto che in questo caso è facile fare il conto a memoria)

È noto che il determinante cambia segno se vengono scambiate due righe e quindi, se ci sono due righe uguali, e le scambiamo, il determinante dovrebbe cambiare segno e mantenere lo stesso valore allo stesso tempo. Pertanto deve avere valore zero.

Gli autovalori sono 2, corrispondenti all'autovettore (1,1), e 0, corrispondente all'autovettore (-1,1). Qui i due autovettori non sono normalizzati, il che non crea problemi. Il lettore interessato può comunque provare a normalizzarli. I due autovettori sono manifestamente ortogonali (e il loro prodotto interno lo dimostra). Gli autovettori puntano ora verso le due linee a 45 gradi rispetto agli assi x e y. Se prendiamo la linea y = x, sostituendo questo valore nella forma quadratica, troviamo che lungo tale linea, $z = 4\,x^2$, cioè, abbiamo una parabola. Invece, se prendiamo x = -y, otteniamo z = 0, una linea retta. Questo spiega perché abbiamo un caso indefinito: la linea z = 0 lungo la linea retta y = - x non permette all'origine di essere né un minimo né un punto di sella, come mostra la figura 9.

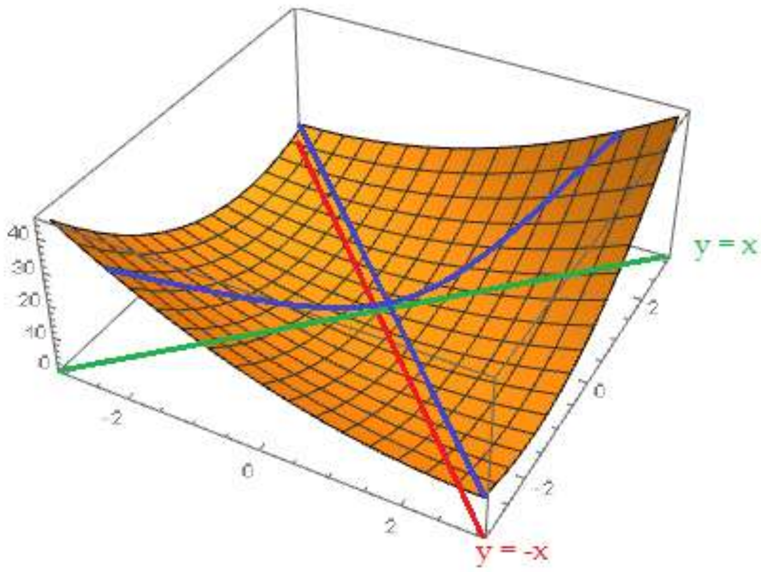


Fig.9 (fatta usando il linguaggio Wolfram-Mathematica)

Contrariamente a quello che si può credere facendo le cose senza attenzione, quindi, ci possono essere dei punti in cui le derivate esistono, ma come si vede dalla figura 2, non abbiamo né un massimo, né un minimo, né un punto sella. E la situazione , come in questo caso, potrebbe non modificarsi neppure esaminando termini di grado superiore dello sviluppo in serie di Taylor di determinate funzioni. In ogni caso, l'anomalia indicata non è l'unica anomalia che può sorgere se il determinante Hessiano = 0.

X.

E ora spero che il lettore desideroso di saperne di più sul determinante Hessiano sia pronto per una sorpresa. Indubbiamente, lo Hessiano è un animale interessante nello zoo matematico, con molte applicazioni che elencherò nelle Conclusioni, *ma non è l'unico strumento matematico assolutamente necessario per ridurre una forma quadratica alla sua forma canonica*. La dimostrazione che segue può essere estesa a n variabili, ma diventa particolarmente semplice, inevitabilmente, in due dimensioni.

Consideriamo la forma quadratica

$$Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

La cui matrice associata è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Lavoriamo sulla porzione di Q che contiene x. It is: $ax^2 + 2bxy$.
Tuttavia, per $a \neq 0$:

$$\frac{1}{a}(ax + by)^2 = ax^2 + 2bxy + \frac{b^2}{a}y^2$$

E perciò :

$$Q = \frac{1}{a}(ax + by)^2 - \frac{1}{a}(b\,y)^2 + cy^2 = \frac{1}{a}(ax + by)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$$

Procedendo alle seguenti identificazioni

$$A = \frac{1}{a}$$
$$X = (ax + by)$$
$$B = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)$$
$$Y = y$$

Si ottiene

$$Q(X, Y) = AX^2 + BY^2$$

Cioè la quadratica in forma Canonica.

Ora, la forma quadratica che noi intendevamo studiare da principio era:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

La quale ci permette di assegnare valori espliciti ai coefficienti e alle variabili:

$$A = \frac{1}{f_{xx}}, \quad B = \left(\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}}\right), \quad X = (x\, f_{xx} + y\, f_{xy}), \quad Y = y$$

Ed alla quadratica l'espressione:

$$Q(X,Y) = \frac{1}{f_{xx}}\ (x\, f_{xx} + y\, f_{xy})^2 + \left(\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}}\right) Y^2$$

Chiaramente, il coefficiente B non è altro che il determinante Hessiano diviso $f_{xx}$. Vediamo così ancora una volta che:

1. Se D>0 e $f_{xx} > 0$, A e B sono positivi, Q è maggiore di zero e e abbiamo un minimo
2. Se D>0 and $f_{xx} < 0$, A e B sono negativi , Q è minore di zero e abbiamo un massimo.

Per il caso D < 0, dobbiamo esaminare la forma canonica in tutto il suo splendore.

Sappiamo che lo Hessiano è negativo. Se $f_{xx}$ è positivo , abbiamo che il primo termine è positivo e il secondo negativo; se $f_{xx}$ è positivo abbiamo il contrario.

1 Caso: $f_{xx} > 0$.

Ponendo Y (=y) =0, si ottiene che lungo l'asse x abbiamo la parabola positiva Q(x) =$f_{xx}\ x^2$ , mentre lungo l'asse y, ponendo X = 0, abbiamo una parabola negativa, perché tale è il segno del coefficiente di $Y^2$. (X=0 implica che abbiamo posto

$$\frac{x}{y} = -\frac{f_{xy}}{f_{xx}}$$

Ciò che può essere fatto, essendo $f_{xx}$ non nulla.)

2 Caso: $f_{xx} < 0$.

Procedendo come nel caso precedente, i segni delle due parabole sono scambiati, come si può subito verificare.

In entrambi i casi abbiamo quindi un punto sella, come è dimostrato in figura 10, dalle due parabole di segno opposto ortogonali, passanti per il punto critico.

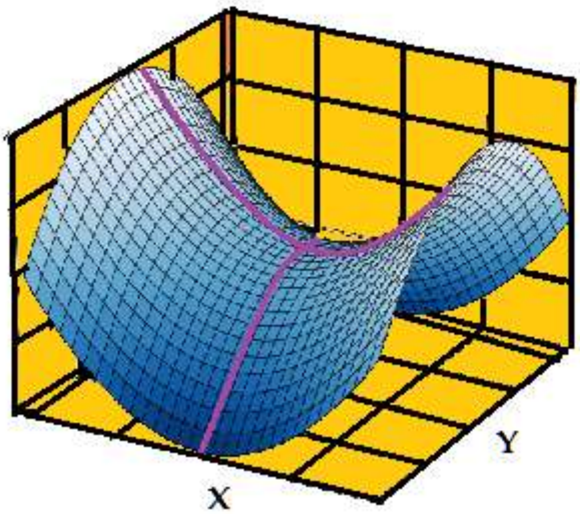


Fig.10 (1 Caso: $f_{xx} > 0$)

Adattato da:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Saddle_point.svg
By Nicoguaro (Own work) [CC BY 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0)], via Wikimedia Commons

Questo metodo, in due variabili, è immediatamente comprensibile e porta alle stesse conclusioni dell'uso del determinante Hessiano. Ancora più importante, il fatto che il numeratore di B sia effettivamente il determinante in questione, mi ha dato il sospetto che Hesse abbia iniziato da qui a sviluppare la sua teoria: in un certo senso lo Hessiano è caduto nelle sue mani dal cielo, mentre analizzava le forme quadratiche in generale, e lui ne avrebbe sviluppato la sua teoria sulle superfici bidimensionali.

**CONCLUSIONI.**

Lo Hessiano (sia esso la matrice o il determinante) è materia per gli studenti che hanno già superato i primi passi della matematica. Un po 'di verbosità, da parte mia, derivante dalla mia esperienza con gli studenti e dai loro dubbi più comuni (che furono anche i miei), insieme a un carattere di stampa abbastanza grande, hanno fatto di un breve saggio un mostro di 35 pagine. La domanda che sorge sempre nella mente degli studenti è "Ne vale la pena?".

Bene, le forme quadratiche entrano almeno nei seguenti campi:

1. Teoria dei numeri,

2. algebra lineare,

3. teoria dei gruppi (gruppo ortogonale),

4. geometria differenziale (metrica Riemanniana, in particolare la “seconda forma fondamentale”),

5. topologia differenziale (forme di intersezione di quattro-varietà, teoria di Morse),

6. La teoria di Lie (forma di  Killing),

7. Teoria delle catastrofi ....

Se non uno di questi campi è di vostro interesse, allora dovreste pensare che dopo tutto, questi (e simili) sono gli oggetti di cui si occupa la matematica, e trarre le vostre conclusioni.