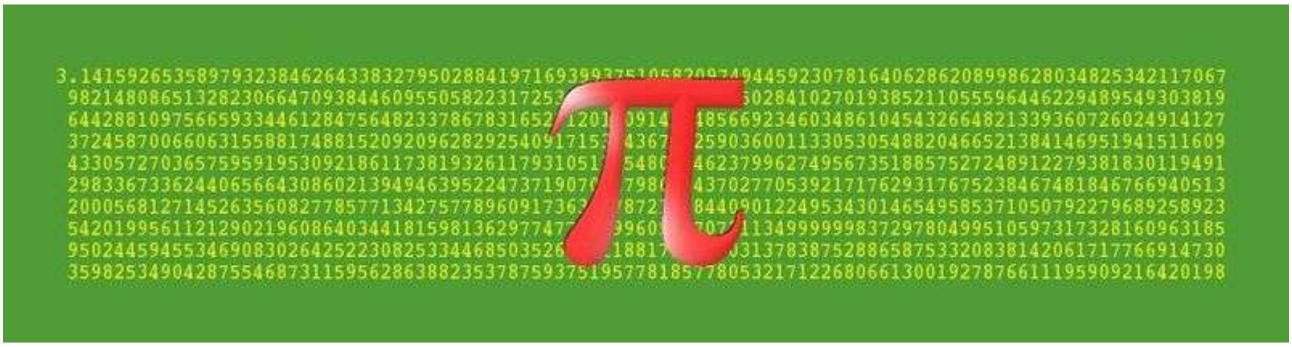
PIGRECO



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/First_thousand_digits_of_pi..jpg
By Tom Murphy (Own work) [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons

Non c'è costante matematica più importante del Pigreco. Come tutti sanno, compare quando in geometria si studia il cerchio, e veniamo informati del fatto che il rapporto fra la circonferenza ed il diametro di un cerchio, di tutti i cerchi, è Pigreco, che viene chiamato talvolta familiarmente "tre e quattordici".

Le costanti importanti in matematica non sono molte, ma, a parte il Pigreco, esse appaiono tardi, quando il nostro destino matematico si è deciso. La costante "e", che vale 2.7... non è per tutti. Ancora meno lo è la "Gamma" (minuscolo!) di Eulero. E qui decisamente bisogna che si sia deciso il nostro destino di matematici.

Tuttavia, queste costanti sono quello che mi dà l'impressione che i numeri abbiano un'esistenza indipendente da noi. Sono certo che se sbarcherà un'astronave da qualche lontano pianeta, in qualche forma o notazione, gli astronauti dovranno conoscere il pigreco.

Ricordo il primo stupore: pigreco è un numero "irrazionale". Bel nome. Ma comunque è **decimale, illimitato, e non vi si riconosce un periodo.**
E poi, mi fu detto più tardi, quando ancora non avevo neppure capito che cosa fosse un numero irrazionale, il Pigreco appartiene alla classe più vasta di numeri irrazionali, dei cosiddetti numeri trascendenti, che non sono soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi.
Insomma, mi si presentarono subito tre compiti:
1) imparare a memoria quante più cifre potevo di pigreco;
2) imparare a calcolare pigreco
3) comprendere la dimostrazione della trascendenza di pigreco.

In questo **sito** si apprendono le tre cose, cioè:
1) come si impara un numero grande di cifre di pigreco (http://dainoequinoziale.it/mnemotecnica/2017/02/15/centopi.html);
2) come si calcola pigreco (in questa pagina)

3) la dimostrazione della trascendenza di Pigreco, o Teorema di Lindemann (1872). Questa non c'è ancora, ma arriverà.

Resta da dire che una volta lessi su un blog che un tapino chiedeva se pigreco poteva essere lo stesso in tutto l'universo. Un tizio, con caratteristica arroganza e sufficienza rispose: " *NO, perché nelle vicinanze di un buco nero il rapporto tra circonferenza e diametro può essere assai diverso da Pigreco*". Non vuole dire nulla. La risposta che l'arrogante doveva dare era piuttosto:"*Non so. Ma in uno spazio curvo, come ad esempio nelle vicinanze di un buco nero, il rapporto fra circonferenza e diametro NON vale pigreco*". Il fatto è che ci sono diversi impieghi di pigreco, e il rapporto tra circonferenza e diametro è solo uno di essi. Tanto per dire, l'abitante del più semplice dei buchi neri, quello cosiddetto di Schwartzschild, se vorrà conoscere quanto vale il "volume" del suo buco nero si troverà il pigreco fra i piedi. D'altra parte, tutte le pagine di Wikipedia che si occupano di pigreco, dopo le applicazioni geometriche elencano decine di altre applicazioni provenienti dai più svariati campi della matematica e della fisica, in cui non si vedono cerchi. Il Fisico Feynman, disse che fin da ragazzo, quando in una formula vedeva un pigreco, si chiedeva: "Dov'è il cerchio?" Ma questo, forse, era un capovolgere il problema.

SUL CALCOLO DI PIGRECO

Ma come si fa a calcolare Pigreco?

a) Seguaci di Archimede.
Ricordo ancora quando il mio maestro di quarta elementare ci disse che il numero pigreco non termina mai e che se ne conoscevano allora un migliaio di cifre. Io andai a casa e presi un cordino, lo disposi intorno ad un vaso rotondo, divisi la lunghezza del cordino per il diametro del vaso, e trovai non 3.14159 ed infinite cifre, ma soltanto 3.
Dunque non è con metodi del genere che si calcola il pigreco.
Ci sono però diversi modi funzionanti. In effetti, calcolare pigreco è un'arte.
Archimede, per quanto ne sappiamo, fu il primo ad indicare un modo chiaro e netto per arrivarci.

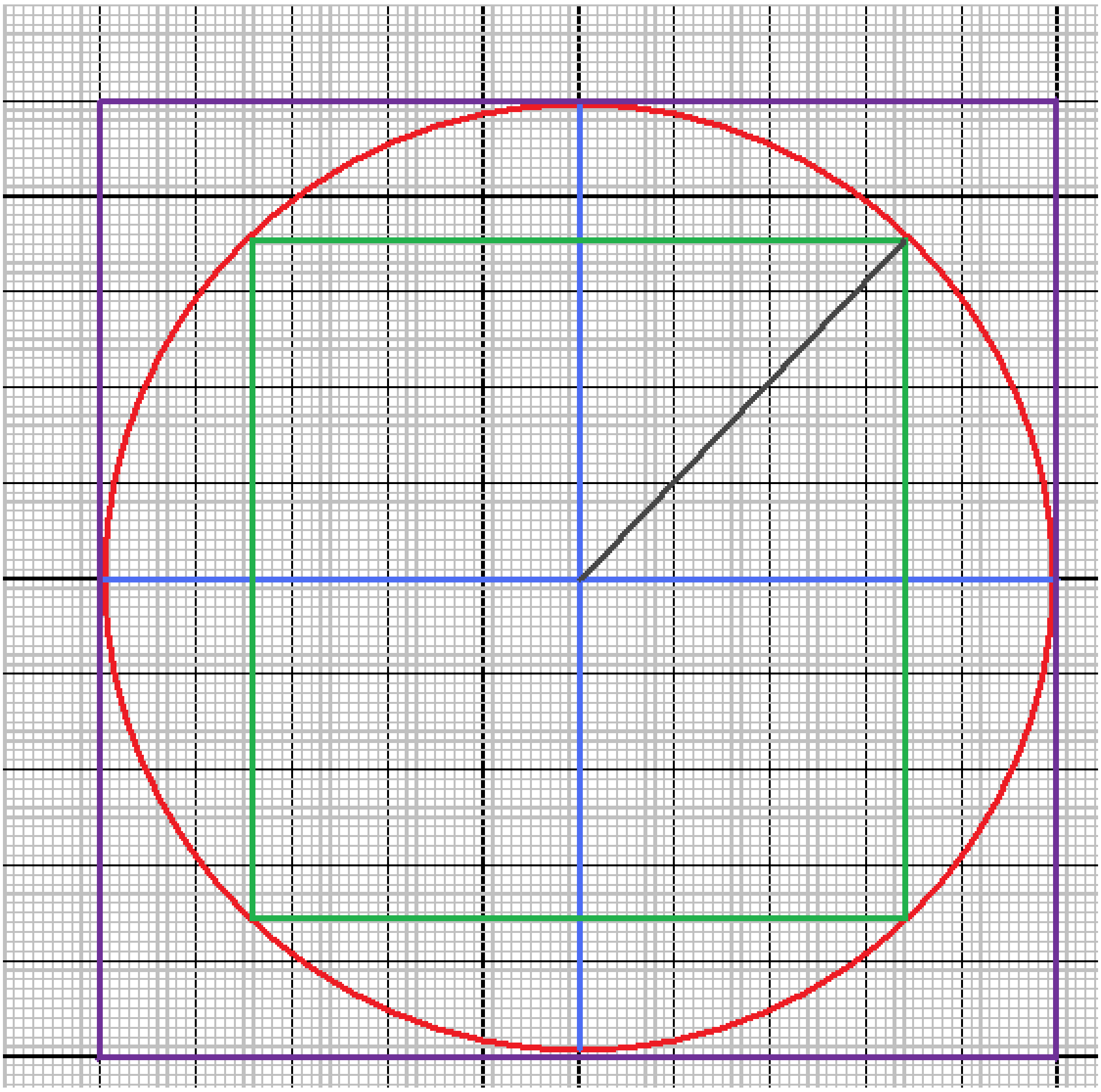


Fig.1

Usiamo un bel foglio di carta millimetrata.
Dato un cerchio, si può sempre disegnare un poligono regolare che ha i vertici sul cerchio (poligono

inscritto), o un poligono regolare di egual numero di lati tangenti al cerchio (poligono circoscritto). Farlo usando solo il compasso e la riga non è sempre possibile per poligoni di qualsiasi numero di lati, ed il dimostrare quali poligoni possano essere costruiti con riga e compasso fu una gloria di C. F. Gauss. Ma con un buon goniometro noi non abbiamo difficoltà.
La somma delle lunghezze dei lati del poligono circoscritto è "evidentemente" più grande della lunghezza della circonferenza, che, a sua volta, è maggiore della somma dei lati del poligono inscritto. “Evidentemente” non va poi tanto bene, perché esistono curve inscritte in un cerchio la cui lunghezza è superiore alla circonferenza. Per esempio, una curva che fa questo brutto scherzo è la curva di Von Koch, che magari vedremo quando farò un post sui frattali.
Ma per il quadrato e poligoni regolari possiamo fidarci dei nostri occhi.
Proviamo con un cerchio di raggio 5 e quindi diametro 10 (fig.1). Il quadrato inscritto, verde, ha lati lunghi circa 6.8, ne ha 4, totale: 27.2. Il quadrato circoscritto è lungo 40. Quindi dobbiamo aspettarci che la circonferenza (che, sappiamo bene, è lunga pigreco) sia compresa fra questi due valori. Proviamo a prendere il valore intermedio: (40+27.2)/2=33.6, con un pigreco che vale 3,36. Un po’ grande. Ma era il primo tentativo, con un disegno fatto di proposito coi piedi. Noi vediamo abbastanza bene che aumentando il numero di lati, otteniamo un poligono circoscritto ed uno inscritto che approssimano sempre meglio il cerchio.

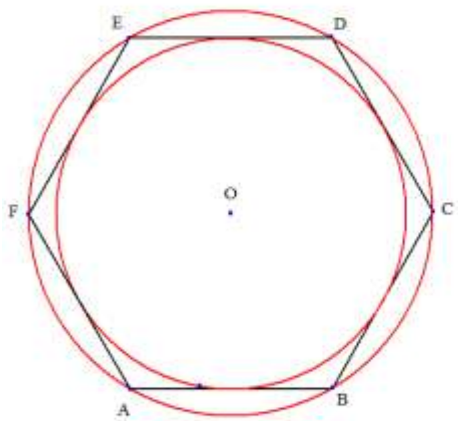


Fig.2°

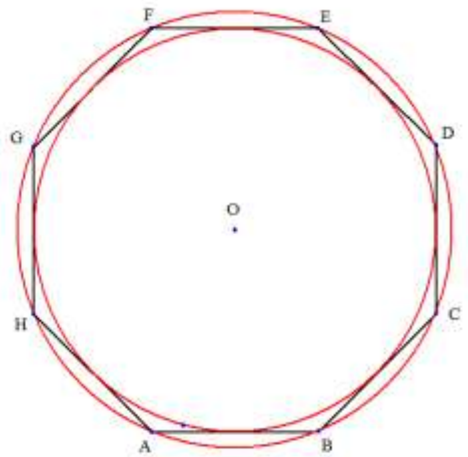


Fig.2b

Archimede usò una formula che, dato il lato di un poligono inscritto, permette di calcolare (usando il teorema di Pitagora e nulla più) la lunghezza del lato dei due poligoni, inscritto e circoscritto, con un numero doppio di lati.

Non voglio imporre la formula di Archimede e dei suoi successori, ma, come dicevo, si tratta unicamente di due applicazioni del teorema di Pitagora:
1) nel triangolo rosa vale la relazione $c = \sqrt{(R^2 - L_n{}^2/4)}$, dove L_n è il lato del poligono INSCRITTO con n lati;
2) nel triangolo verde vale la formula $L_{2n} = \sqrt{((R-c)^2 + L_n{}^2/4)}$, dove L_{2n} è il lato cercato del poligono INSCRITTO di 2n lati..
Sostituendo c e riordinando, si trova (per il poligono INSCRITTO):

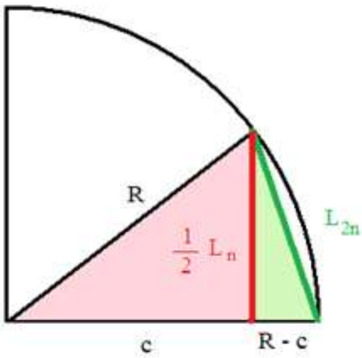


Fig.3

$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{{L_n}^2}{4}}}$$

Che si può mettere in forma più compatta, ma a noi non serve.
Piuttosto notiamo che, se n =4, per cui sappiamo che $L_4 = R\sqrt{2}$, sostituendo otteniamo che il lato dell'ottagono è

$$L_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

Se poi si vuole L_{16} si deve inserire questa formula in quella precedente. Procedendo si dovrebbe trovare che raddoppiando continuamente il numero di lati, la formula per numeri di lati del genere di 4, 8, 16, 32 etc. può essere scritta senza doverla calcolare ogni volta, grazie ad una sua bella simmetria. Ma perché dobbiamo trainarci dietro un R (raggio del cerchio) indeterminato quando sappiamo che tutti gli R producono lo stesso pigreco?

E' più semplice partire col lato $L_4 = \sqrt{2}$, cioè R =1, introdurre questo valore nella formula per L_{2n}, cioè L_8, trovare il perimetro moltiplicando per 8, introdurre L_8 nella nostra formula come nuovo L_n trovare L_{16} e procedere. Basta servirsi di una calcolatrice che faccia le radici quadrate e organizzare bene i calcoli.
Qui il lettore attento dirà: "E il poligono circoscritto?". D'accordo, anche per i poligoni circoscritti esistono formule che non richiedono altro che radici quadrate, ma sappiamo che i valori dei due perimetri tendono comunque al valore della circonferenza. Semplicemente, il nostro sarà approssimato per difetto e ci darà un pigreco un po' più piccolo di quello vero.

Un programma SmallBasic in poche istruzioni può eseguire questo calcolo senza problemi.In seguito vedrò di proporne uno elementare, ma sarebbe bene che il lettore non aspettasse me.
Scegliendo raggio R=1 dovremmo arrivare ad un perimetro sempre più vicino a 2π per valori sempre maggiori del numero dei lati.

Il cuore del programma sarà la formula data, particolarizzata per R =1, cioè

$$L_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{{L_n}^2}{4}}}$$

Che calcoleremo per iterazione. Dovremo cioè costruire un ciclo che, partendo ad esempio da $L_4 = \sqrt{2}$ inserito nel secondo membro, ovvero n =2, porti a L_8, il cui valore verrà a sua volta inserito a secondo membro, porgendoci L_{16}, valore da inserirsi a secondo membro e procedendo alla stessa maniera fino a che avremo raggiunto la (modesta) massima precisione di SmalBasic o del linguaggio che useremo.

Ad ogni ciclo calcoleremo un Pigreco approssimato, dato da n L_{2n} e ne seguiremo con gioia il progresso.

Per edificazione di coloro che usano ancora il programma Qbasic, posso aggiungere.

PROGRAMMA IN QBASIC:
CALCOLO DI PIGRECO COL METODO DI ARCHIMEDE

```
CLS
REM Calcolo di pigreco seguendo  Archimede
INPUT “Quanti passi? “, N
L = SQR(2)
FOR I = 2 TO N
L = SQR(2 - 2 * SQR(1 - L#^2/4))
PI = 2^I * L
PRINT I, 2*2^I, L, PI
NEXT I
```

I risultati sono ottimi: presto siamo al limite della precisione di QBasic, e troviamo una buona approssimazione di pigreco, il quale vale 3,141592653589… Dalla tavola qui sotto si vede che abbiamo sei cifre decimali corrette. Non si può spingere QBasic troppo lontano. Ad un certo punto la precisione incomincia a fare difetto e i valori di pigreco scendono invece di salire. Usando doppia precisione (cioè con L# e PI# invece di L e PI) il punto più vicino a pigreco lo troviamo per 131072 lati, e vale 3.141592653325, con 9 cifre decimali corrette, poi i guai incominciano. Sotto certi aspetti, questa nove cifre sono molte, ma già nel 1600 Ludolph van Ceulen aveva calcolato pigreco con trentacinque cifre decimali.

Senza andare in doppia precisione troviamo:

Numero lati	Lato	Perimetro/2 Approssimazione a π
8	0.7653669	3.061467
16	0.3901806	3.121445
32	0.1960343	3.136549
64	0.09813535	3.140331
128	0.04908246	3.141277
256	0.02454308	3.141514

512	0.01227177	3.141573
1024	0.06135914	3.141588
2048	0.0306796	3.141592

A voi fare un programmain SmallBasic

b) Metodo grafico approssimato.

Però, se non siete in grado di derivare la formula che ho dato, è più onesto usare invece un metodo grafico, molto meno preciso.
Prendete un foglio di carta millimetrata e tracciate una linea di 10 centimetri. Questo vi permetterà un paio di cifre sicure nei vostri conti. Poi tracciate con un compasso una parte del cerchio di raggio 10 cm e tracciate con un goniometro le rette che formano angoli che voi deciderete.
Notate che non avete bisogno di disegnare i poligoni interi, basta disegnare un lato, e questo lo si può fare facilmente se conosciamo l'angolo al centro ed abbiamo un goniometro. L'angolo al centro, naturalmente, è 360 diviso il numero di lati.

Dato che noi non useremo la formula di Archimede possiamo usare un poligono di 18 lati. Ciò vuol dire che l'angolo da cui il centro vede ogni lato è 20 gradi (= 360/18). **A noi ne basta mezzo**. Data la retta a 10 gradi, tracciamo due segmenti di retta, uno, perpendicolare, dal cerchio alla nostra retta di base (blu), e l'altro, perpendicolare dal punto ove il cerchio tocca la retta di base alla retta a dieci gradi (rosso). Il primo segmento, AB, è metà del lato del poligono inscritto di 18 lati, l'altro è metà del lato del poligono circoscritto di 18 lati.

Se facciamo il disegno, otteniamo che il perimetro del poligono inscritto è 36 volte il mezzo lato blu, e vale 17.5 x 36 = 630 mentre il perimetro del poligono circoscritto è 18 x 36 =648. La media è 639, con un pigreco = 3,195.

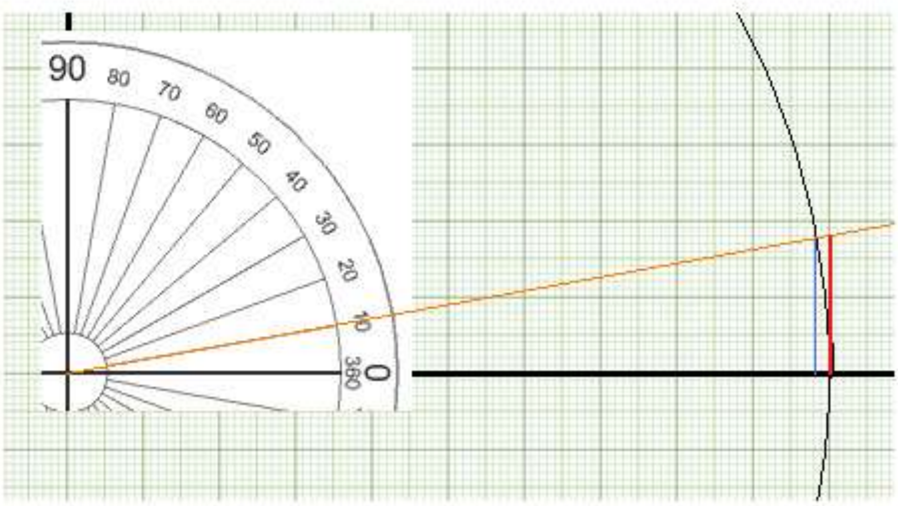


Fig.4

La formula "converge", ma non troppo rapidamente, al valore 3.14159.

Potete fare disegni più accurati, per esempio con un cerchio di raggio 20 cm e tentare con un poligono di 36 lati.

Se proprio siete megalomani potete notare che metà del lato del poligono circoscritto è dato dalla tanA, dove A è metà dell'angolo sotteso da un lato, mentre metà del lato del poligono inscritto è data da sinA. Andiamo a cercare (tavole, Google, Basic) i lati del poligono di 180 lati, angolo due gradi. Ci occorre la tan(1°) e il sin(1°). Tan(1°) = 0.017455, mentre sin (1°)= 0.017452 Intanto vediamo che sulla carta millimetrata non avremmo mai potuto vedere la differenza tra tanA e sinA, che differiscono solo alla sesta cifra decimale. In effetti questa differenza tende a zero quanto più piccoli sono gli angoli. D'altra parte proprio questo fatto, che la lunghezza del perimetro del poligono circoscritto tende ad essere eguale a quella del perimetro del poligono circoscritto (ed entrambe le lunghezze tendono a quella della circonferenza) è la precisa ragione per cui cerchiamo di calcolare pigreco in questo modo.

Il perimetro del poligono di 180 lati inscritto è 360 volte sinA e vale 6.28286. Il poligono del poligono di 180 lati circoscritto vale 6.2832. La media divisa per due ci dà un bel pigreco: 3.14167. Naturalmente, ci si può obiettare che in generale all'origine delle tavole trigonometriche, troviamo un valore di pigreco con un congruo numero di cifre decimali. Alla qual osservazione rispondo che ciascuno si diverte come gli pare.

c) Metodo numerico

Nel 1600 un altro Inglese, James Gregory (forse il meno considerato dei grandi matematici inglesi), trovò in base ad un ragionamento più complesso, che la seguente serie infinita permette di calcolare pigreco:

pigreco = 4 (1 -1/3+1/5-1/7+1/9 eccetera. Ma bisogna andare fino all'infinito.

Vediamo come funziona. La prima approssimazione è :
pigreco =4 (un po' grande)
la seconda è
pigreco= 4(1-1/3) = 8/3= 2,67, un po' piccolo. Pigreco deve stare fra le due approssimazioni: facciamo la media e otteniamo 3.33.

Terza approssimazione:
pigreco = 4(1-1/3+1/5)= 4((15-5+3)/15)= 52/15 = 3.47 (grande)
Quarta approssimazione:
pigreco= 4(1-1/3+1/5-1/7)= 4 (105-35+21-15)/105=2.89
media: 3.18
Anche qui, soprattutto usando il trucco della media, a poco a poco ci si arriva.

Suggerisco di fare un semplicissimo programma in SmallBasic per ottenere i valori di cui sopra. Anqui, dopo non molte cifre, si cozzerà contro la precisione di SmallBasic, e i risultati incominceranno ad andarsene per conto proprio.
Programma QBASIC per sommare la serie di Gregory.

PROGRAMMA IN QBASIC:
CALCOLO DI PIGRECO COLLA SERIE DI GREGORY

```
CLS
```

```
PRINT "Calcolo di pigreco per mezzo della serie di
Gregory"
INPUT "Quanti passi? ", PASSI
PIGRECO# = 1
FOR N = 1 TO PASSI
PIGRECO#  =  PIGRECO#  -  (2/(16*N^2-1))
PRINT  PIGRECO#*4
NEXT N
```

Il programma dà la possibilità di decidere quanti passi fare. Il procedimento è nella sua forma più semplice, in cui al valore 1 di partenza sottraggo due termini per volta, cioè

$$\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}=\frac{2}{16n^2-1}$$

Faccio questo per tener conto del fatto che i termini 1/(4n-1) hanno segno negativo e i termini 1/(4n+1) - più piccoli - hanno segno positivo. Ed esiste un fattor comune, 2.
Nel programma il cancelletto (#) sta ad indicare "doppia precisione", cioè che desidero 20 cifre decimali, altrimenti dopo pochi passi il calcolo aggiunge solo degli zeri ed il risultato si blocca assai lontano dalla meta.
Facendo 1 000 000 di passi (e quindi sottraendo la differenza di due termini per volta, due milioni di termini in tutto), ottengo 3.1415931536, mentre il vero pigreco incomincia con 3.1415926. Insomma, cinque cifre corrette le abbiamo.

Se vi sentite in vena, provate a usare il metodo indicato più sopra, di fare la media tra i risultati dopo n e dopo n+1 passi. Dovreste arrivare più in fretta a valori più corretti di pigreco.

In conclusione abbiamo due grandi classi di metodi, oltre a quello grafico, che non permette di andare molto lontano:
1) Quelli basati sul ragionamento geometrico, il cui padre è Archimede,
2) Quelli basati su formule algebriche, in cui i cerchi si vedono meno bene, il cui padre è Gregory.

Se ci vogliamo sporcare le mani di grasso e andare a trafficare nella macchina di Gregory possiamo trovare una serie assi più veloce che ci dà il desiderato pigreco. Occorrono solo nozioni di matematica di terza liceo scientifico.

La serie di Gregory nasce , ad esempio, dal fatto che

$$\int \frac{dx}{1+\ x^2}=\arctan\,(x)$$

Ricordando questo, la serie di Gregory viene fuori a memoria: semplicemente, si svolge la serie geometrica nell'integrando e si integra termine a termine:

$$\int (1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots .. = \arctan(x)$$

Arctan(1) non è altro che "l'arco che ha per tangente 1", che vale 45°, cioè $\pi/4$.

In altre parole, ponendo x =1 in entrambi i membri:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Da cui il risultato che abbiamo attribuito a Gregory.

Ora, sfortunatamente, sappiamo poche tan(x) a memoria. Per esempio, però, conosciamo la tan(30°) = tan $(\pi/6)$ $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ (difatti sin(30°) = ½, e quindi cos(30°) = $\sqrt{3}/2$, da cui la tangente.

Il problema di questo utilizzo è che conosceremo pigreco *al massimo* con la precisione con cui conosceremo la radice quadrata di 3. Ma ci sono facili metodi per calcolarla con la precisione voluta: per esempio il metodo di procedere a tentativi. Si faccia l'ipotesi che la radice valga 1. Qui 3/1 ci dà 3, cioè un numero maggiore di 1. Ciò significa che la radice da noi scelta in prima approssimazione era troppo piccola, in quanto dividendo un numero per la sua radice quadrata si dovrebbe trovare un valore uguale a quello della radice quadrata. Noi facciamo la media tra 1 e 3 e troviamo 2 (= $\frac{1+3}{2}$). Ora dividiamo 3 per 2. Questa volta troviamo 1.5, un numero più piccolo di 2. Facciamo di nuovo la media, questa volta tra 1,5 e 2, e troviamo 1.75. Ci stiamo avvicinando. Procedendo in questo modo (divisione e media), dopo i primi passi di avvicinamento, guadagniamo due cifre corrette ad ogni tentativo. In effetti la radice quadrata cercata è 1.7320...

Ad ogni modo, usando *tan* $(\pi/6)$ $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ nella serie di Gregory, troviamo (mettendo in evidenxa x $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, il che ci lascia potenze pari ovunque)

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} \dots \right)$$

Che è assai più veloce nel convergere.

Si può fare ancora meglio. Il trucco successivo, che non richiede estrazioni di radici, consiste nello scegliere x =1/5. Poniamo $\alpha = arc\tan\left(\frac{1}{5}\right)$. In tal caso, applicando la serie trovata più sopra per l'arcotangente, abbiamo:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 * 5^3} + \frac{1}{5 * 5^5} \dots$$

Qui, il problema è che non sappiamo quale frazione di π abbia per tangente 1/5,

Tuttavia, si può osservare, dalla trigonometria elementare, che

$$Tan(2\alpha) = \frac{2\,Tan(\alpha)}{1-\ Tan^2(\alpha)} \ = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{5}{12}$$

Da cui: 2α = arctan $(5/12)$

Applicando la stessa formula di duplicazione della tangente, si ottiene:

$$Tan(4\alpha) = \frac{10/12}{1-25/144} = \frac{120}{119}$$

Ma 120/119 è di poco inferiore ad 1, e noi sappiamo che l'arco che ha per tangente 1 vale $\frac{\pi}{4}$, per cui possiamo scrivere che:

$$4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$$

Dove β è un angolo molto piccolo. Ora sarà

$$Tan(4\alpha) = \frac{120}{119} = \frac{\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi}{4}\right) + Tan(\beta)}{1-\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi}{4}\right)Tan(\beta)} = \frac{1+Tan(\beta)}{1-Tan(\beta)}$$

Ma da

$\frac{120}{119} = \frac{1+Tan(\beta)}{1-Tan(\beta)}$, si ha $Tan(\beta) = \frac{1}{239}$ e $\beta = Arctan(\frac{1}{239})$

Ora,

$$\frac{\pi}{4} = \ 4\alpha - \beta$$

E finalmente:

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16 * arc\tan\left(\frac{1}{5}\right) - \ 4 * Arctan\left(\frac{1}{239}\right) =$$

$$16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3*5^3} + \frac{1}{5*5^5} - \ ...\right) - \ 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3*239^3} + \cdots)$$

Questa è la formula cercata, che dà pigreco in termini di due serie di rapida convergenza. John Machin, matematico inglese (1680-1751), scoprì questa formula nel 1706, e calcolò pigreco con più di 100 cifre decimali. Questa è dunque la capostipite delle formule dette “di tipo Machin”, che, in forme assai più complicate, sono ancora usate per il calcolo di pigreco.

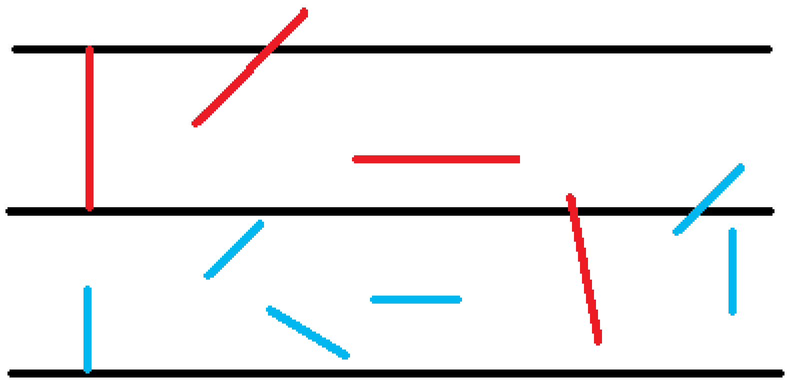
C’è ancora almeno un terzo gruppo di metodi, assai più curioso.

d) metodi probabilistici.

I. L’ago di Buffon.
Supponiamo di lanciare a caso degli oggetti unidimensionali su un piano su cui siano tracciate delle linee equispaziate, per esempio con spaziatura L. Nel Settecento, quando era di gran moda studiare calcolo differenziale ed integrale, il naturalista Georges Buffon propose il problema di calcolare la probabilità che, facendo cadere a caso un ago di lunghezza L sul piano rigato di cui sopra, l’ago attraversi una riga. Più tardi ripropose il problema e pubblicò la sua soluzione, da cui risulta un legame inatteso con pigreco.

La soluzione era basata sul “calcolo integrale”, che in questo saggio non affrontiamo. Si può tuttavia dare un’altra spiegazione altrettanto logica e più semplice.

Anzitutto facciamo delle simulazioni.
In ogni simulazione, naturalmente, gli aghi devono avere la stessa lunghezza. Notiamo però che se gli aghi sono corti gli attraversamenti sono pochi. Se sono lunghi, gli attraversamenti sono più frequenti.



La simulazione la possiamo fare in tre modi:
1) facendo cadere appositi stecchini su un foglio rigato;
2) simulandola via computer
3) credendo a qualcuno che l’ha fatta, per esempio a me.

La simulazione col computer è abbastanza semplice. Lascio al lettore, temporaneamente, lo sviluppo di un programma in SmallBasic e new propongo uno in Qbasic:
Qui propongo un rudimentale programma QBasic

PROGRAMMA NUMERO 13 IN QBASIC: CALCOLO DI PIGRECO CON L’AGO DI BUFFON

```
CLS
REM CALCOLO DI PIGRECO CON L’AGO DI BUFFON
CONST PI = 3.141592
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
TOTAL = 0
INPUT “Lunghezza?”, L
```

```
INPUT "Numero passi? ", PASSI
FOR I=1 TO PASSI
TH = 361 * RND
THRAD = TH*PI/180
H=(L/2)*SIN(THRAD)
CENTRO = RND
ES = CENTRO +H
EI = CENTRO -H
IF ES>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF CROSS = 0 THEN GOTO 10
TOTAL = TOTAL +1
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL,CROSS,RAPP
10 NEXT I
```

Il programma anzitutto inserisce la costante $PI = \pi$, poi incomincia la simulazione, che si basa sull'istruzione RANDOMIZE TIMER (che significa di basarsi sul tempo dell'orologio del computer per iniziare la sequenza di numeri a caso, che sono solo, bisogna ricordarlo "pseudo-a caso"). Senza il "RANDOMIZE", i nostri numeri a caso sarebbero sempre gli stessi. Poi abbiamo il solito ciclo "FOR … NEXT" in cui cerchiamo di stabilire se il nostro ago lanciato a caso attraversi o no una riga. Il primo RND sceglie un angolo TH a caso tra 0 e 360 gradi, che poi viene trasformato in THRAD, cioè misurato in radianti moltiplicandolo per $\frac{\pi}{180}$; il secondo RND sceglie una posizione a caso per il centro dell'ago. I quattro IF (in verde) aumentano di uno il numero degli attraversamenti (CROSS) ogni volta che l'ago attraversa o la linea inferiore (0) o la linea superiore (1). Il prossimo IF (giallo) evita che nelle prime fasi sia chiesto al calcolatore di dividere per zero.

Dato che il programma permette di variare la lunghezza, facciamo diversi esercizi, tutti con 10000 lanci:

Lunghezza	Attraversamenti/totale
0.125	0.0781
0.25	0.15881
0.5	0.3189
1.0	0.62880
2.0	1.27420
3.141592	1.5795
6.2831	1.7853

Vediamo che il rapporto attraversamenti/totale è proporzionale alla lunghezza dello stecchino. Non è strano: gettare stecchini lunghi il doppio è come gettare due stecchini per volta (questa simulazione non l'ho fatta, ma il risultato è ovvio). Però non è del tutto intuitivo, perché uno potrebbe immaginare che due stecchini attaccati insieme non abbiamo la stessa libertà di due stecchini liberi. Ma le simulazioni ci dicono il contrario.

Ho mantenuto questa tavola, che da 2 in avanti è sbagliata, per suggerire un ragionamento. Come mai la frequenza degli attraversamenti raddoppia fino a 2 e poi cresce più lentamente? E' un fatto di natura o è un errore di calcolo? La risposta è che si tratta di un errore di calcolo, che sta nel blocco verde. Erroneamente non abbiamo tenuto conto del fatto che quando lo stecco è più lungo di 2, ci possono essere due attraversamenti per lo stesso stecco. Quindi dobbiamo aggiungere alcune istruzioni che tengano conto di questo fatto:

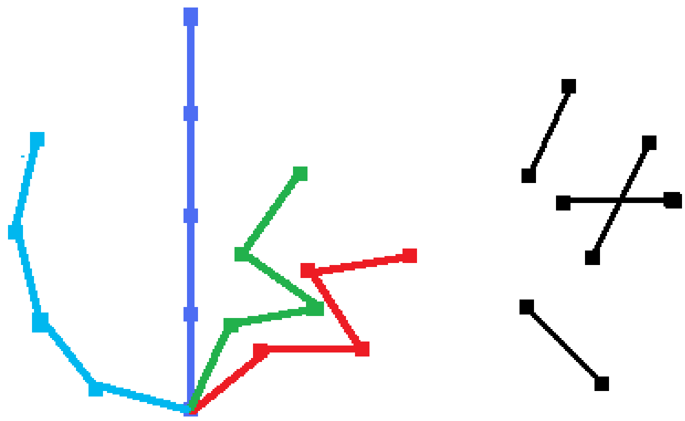
PROGRAMMA NUMERO 14 IN QBASIC: AGO DI BUFFON - CORRETTO

```
CLS
REM CALCOLO DI PIGRECO CON L'ANGOLO DI BUFFON - CORRETTO
CONST PI = 3.141592
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
TOTAL = 0
INPUT "Lunghezza?", L
INPUT "Numero passi? ", PASSI
FOR I=1 TO PASSI
TH = 361 * RND
THRAD = TH*PI/180
H=(L/2)*SIN(THRAD)
CENTRO = RND
ES = CENTRO +H
EI = CENTRO -H
IF ES>=3 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES>=2 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-2 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-3 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=3 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=2 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-2 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-3 THEN CROSS =CROSS +1
IF CROSS = 0 THEN GOTO 10
TOTAL = TOTAL +1
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL,CROSS,RAPP
10 NEXT I
```

Nuova tabella:

Lunghezza	Attraversamenti/totale
0.125	0.0781
0.25	0.15881
0.5	0.3189
1.0	0.62880
2.0	1.27420
3.0	1.9208
3.141592	2.0101

Adesso i conti tornano. Ma si può fare un passo in più. Ci si può convincere del fatto che il numero di attraversamenti diviso il numero totale di lanci è proporzionale alla lunghezza L dell'oggetto filiforme L – **comunque questo sia disposto, arrotolato, piegato**.
Se si è accettato che uno stecco diritto lungo il doppio valga come due stecchi di lunghezza metà comunque disposti non dovrebbe esserci problema ad accettare anche questa affermazione.



Che a lanciare quattro segmenti per volta il numero di attraversamenti venga moltiplicato per quattro non ci piove. Ma il segmento quadruplo e le altre spezzate? Va bene, a prima vista ci sembra che la spezzata rossa abbia maggiore probabilità di cadere nello spazio tra due righe, senza toccarne nessuna. Tuttavia, se tocca una riga , è probabile che la tagli in più di un punto. E in entrambi i casi, l'esperimento ci dice che lanciare l'intero oggetto blu-scuro è come lanciare in un sol colpo quattro degli elementi neri. Questo suggerisce che lo stesso valga per qualsiasi configurazioni degli stessi elementi. Addirittura notate che l'oggetto rosso può "scodinzolare" durante il lancio e diventare l'oggetto verde, e ancora il numero di attraversamenti diviso il numero di lanci sarebbe in media lo stesso. Questo perché quello che ci importa è il numero di segmenti, non la loro disposizione. E quindi vale anche la disposizione "azzurra" che, vediamo, incomincia a disegnare una figura geometrica nota.
Lo stecchino iniziale di lunghezza L può essere pensato come costituito da stecchini brevissimi ("infinitesimi" avrebbero detto nel '700), e ciò che conta è solo la lunghezza totale.

Calcolare gli attraversamenti di una spezzata cadendo non è banale e complicherebbe il nostro programma di simulazione oltre misura. Se però scegliamo un cerchio di lunghezza (cioè raggio) variabile, il conto diventa facile.

Il programma di simulazione diventa:

PROGRAMMA NUMERO 15 IN QBASIC: CERCHI DI BUFFON

```
CLS
REM CERCHI DI BUFFON
CONST PI = 3.141592
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
TOTAL = 0
INPUT "Raggio?". R
INPUT "Numero passi? ", PASSI
CENTRO = RND
ES = CENTRO +R
EI = CENTRO -R
IF ES=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES > 1 THEN CROSS = CROSS +2
IF EI=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI < 0 THEN CROSS = CROSS +2

TOTAL = TOTAL +1
```

```
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL, CROSS, RAPP
10 NEXT I
```

Aggiungiamo una colonna alla tabella:

Lunghezza	Attraversamenti/totale (per un segmento di retta)	Attraversamenti/totale (per una circonferenza)
0.25	0.15881	0.1603
0.5	0.3189	0.3379
1.0	0.62880	0.63626
2.0	1.27420	1.2822
3.0	1.9208	1.9184
3.141592	2.0101	2.00

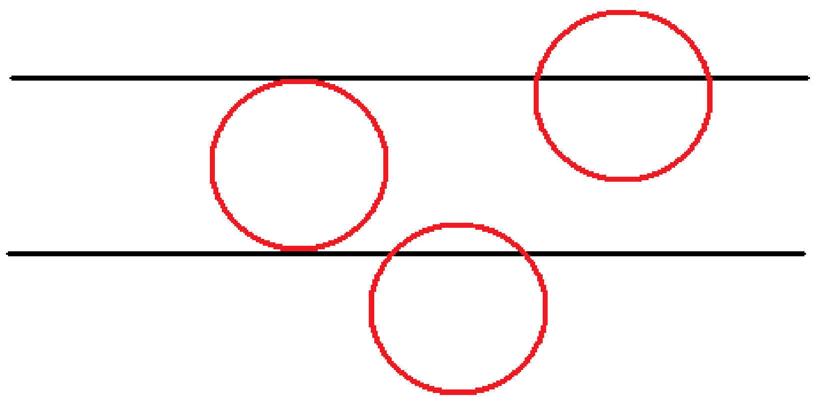
Notate che i cerchi piccoli o non attraversano alcuna riga, o sono tangenti (e ciò conta per un attraversamento) o l'attraversano due volte. La media, però, entro gli errori statistici, è eguale a quella dello stecco diritto lungo quanto la circonferenza.
In altre parole possiamo veramente credere che, dato un oggetto unidimensionale di lunghezza L, abbiamo:

$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = KL$$

E dobbiamo trovare la costante di proporzionalità K.
Ma vediamo bene che se lanciamo anelli rigidi di raggio ½ e circonferenza π, non è neppure necessario procedere a simulazioni. Noi scriviamo:

$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = K\,\pi = 2$$

Infatti, come dimostra la figura, ogni cerchio rigido che cada su carta su cui siano tracciate righe equidistanti, col diametro come interspazio, incontra sempre la rigatura in due punti, o perché tocca una volta ciascuna due righe consecutive, o perché taglia due volte la stessa riga. Quindi il rapporto attraversamenti/ lanci vale 2.



Incidentalmente, vale la pena notare che la nostra tabella, per uno stecchino lungo 3.14 dava 2.01 come numero di attraversamenti per lancio. Questo conferma la nostra ipotesi che il numero di attraversamenti dipende solo dalla lunghezza della linea, di qualunque forma essa sia. Inoltre ci dice che il risultato di 10000 lanci ci lascia incerti già sul valore della seconda cifra decimale.

Abbiamo quindi che $2 = K\pi$, ovvero $K = 2/\pi$

Per stecchini di lunghezza 1 (cioè lunghi quanto l'interspazio) abbiamo che

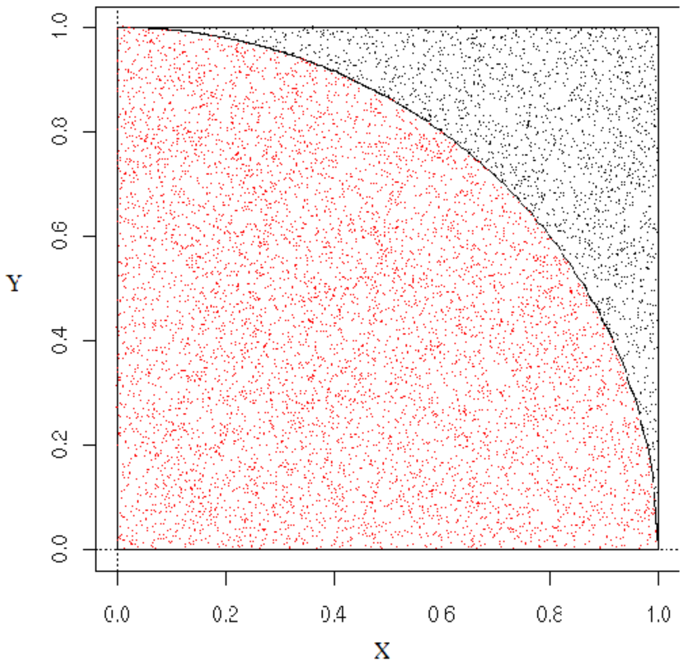
$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = \frac{2}{\pi}$$

Ovvero:

$$2\ \frac{lanci}{attraversamenti} = \pi$$

Su Internet troverete diversi siti che offrono delle simulazioni con cui potete verificare la giustezza del metodo di Buffon.
Con 100 passi sono arrivato a pigreco = 2.98, con 1000 passi a 3.121875, con 10000 a 3.1301, con 100000 a 3.1608, con 1000000 a 3.15199. Non entusiasmante, ma curioso.

II. Metodo Montecarlo
Potremmo pensare ad un altro metodo probabilistico altrettanto impreciso, ma secondo me più facile da capire. Si chiama, con termine generico, "Metodo Montecarlo". E' come se una persona non molto precisa lanciasse freccette su un bersaglio quadrato di lato 1. Se il punto d'impatto è a caso, dopo un certo numero di tentativi il numero di freccette che sono cadute nel cerchio di raggio 1 è proporzionale all'area del cerchio, che è π. Quindi, per semplicità ci limitiamo ad un quarto di cerchio. Ad ogni impatto, per il quale noi identifichiamo le due coordinate X e Y con due numeri casuali tra 0 e 1, noi calcoliamo la distanza dall'origine, che è $\sqrt{(X^2+Y^2)}$ e guardiamo se è maggiore o minore di 1. Alla fine il rapporto tra il numero di impatti nel quarto di cerchio e il numero totale di impatti deve tendere al rapporto tra l'area del quarto di cerchio e l'area del quadrato, cioè $\pi/4$.



PROGRAMMA QBASIC NUMERO 16 - METODO MONTECARLO PER π

```
CLS
REM "PROGRAMMA PER CALCOLARE IN MODO PROBABILISTICO (MONTECARLO) PIGRECO".
RANDOMIZE TIMER
10 INPUT "Numero di tentativi? ", N
CER = 0
FOR I = 1 TO N
X = RND
Y=RND
D = SQR(X^2+Y^2)
IF D<=1 THEN CER =CER +1
NEXT I
PRINT N, 4*CER/N
GOTO 10
```

L'ultima istruzione permette di ripetere la simulazione quanto si vuole. Quando se ne ha abbastanza, si premano insieme "Ctrl" e "C".

Risultati:

Numero Tentativi	risultato
100	3.16
1000	3.224
10000	3.1088
100000	3.14284
1000000	3.139525
10000000	3.141508

Conclusione

Ci sono ancora altri metodi di calcolo di pigreco, ma, almeno per il momento, penso che questi possano bastare.