

IL TEOREMA DEI CINQUE COLORI E LA FORMULA DI CARTESIO-EULERO

L'enunciato del Teorema dei Cinque Colori è semplice: qualsiasi carta geografica politica, in cui i vari paesi sono tutti in un pezzo, non richiede più di cinque colori distinti perché due paesi confinanti non abbiano mai lo stesso colore. Se due paesi si incontrano in un solo punto (ce ne sono, di esempi del genere, al mondo, per esempio Colorado, Utah, Arizona e New Mexico) possono avere lo stesso colore. In realtà esiste un teorema assai più difficile da dimostrare, che afferma che di colori ne bastano quattro. Per saperne qualcosa di più – non certo la dimostrazione – suggerisco di dare un'occhiata a <http://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2019/04/20/quattrocolori.html>.

Noi ci accontenteremo del teorema dei Cinque Colori, un caratteristico problema di *topologia*, in ordine cronologico uno dei primi teoremi di questa disciplina. La **geometria euclidea** studia le proprietà delle figure geometriche, piane e solide, che restano immutate ruotando rigidamente o riflettendo in uno specchio la figura originaria;

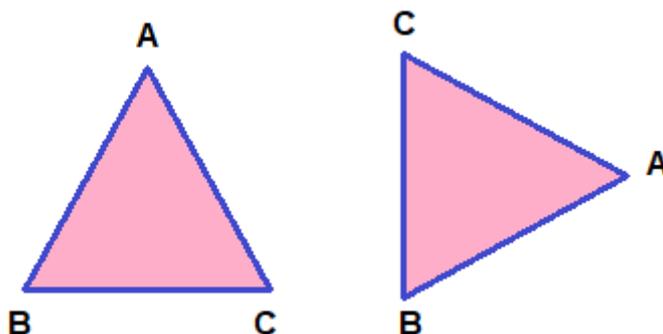


Fig.1

I due triangoli sono uguali e così le loro proprietà (per esempio, sono uguali gli angoli in B, C), anche se sono ruotati di 90° e, una volta ruotato di 90° in senso antiorario il triangolo di destra, essi appaiono come riflessi in uno specchio.

la **geometria proiettiva** studia le proprietà che restano invariate quando le figure, piane o solide, sono proiettate da un punto (che può essere anche all'infinito).

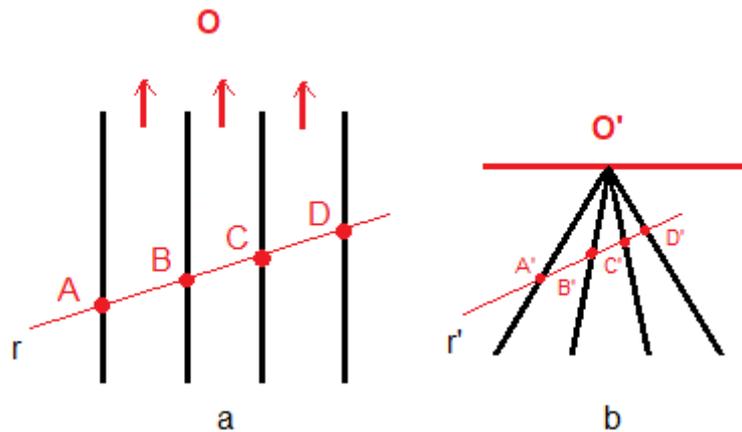


Fig.2

La immagini in (b) (A' , B' , C' , D') sulla retta r' , dei punti (A , B , C , D) sulla retta r in (a) sono allineate e nello stesso ordine per trasformazione proiettiva che ha portato il punto O dall'infinito al finito, in O' . O era un punto sulla "retta all'infinito"; O' è un punto sulla sua immagine, l'Orizzonte.

Invece la **topologia** studia proprietà che restano immutate per trasformazioni assai più generali.

Per esempio, si disegni su una membrana elastica piana una "carta geografica", cioè una rete di figure geometriche con lati, che si incontrano in punti o vertici o nodi, e delimitano facce. I lati possono essere segmenti di rette, archi di curve, o quel che si vuole: quello che vorremo provare è un teorema di topologia, che resta valido sottoponendo la membrana su cui abbiamo disegnato la mappa a certe trasformazioni, che corrispondono a stirarla o torcerla.

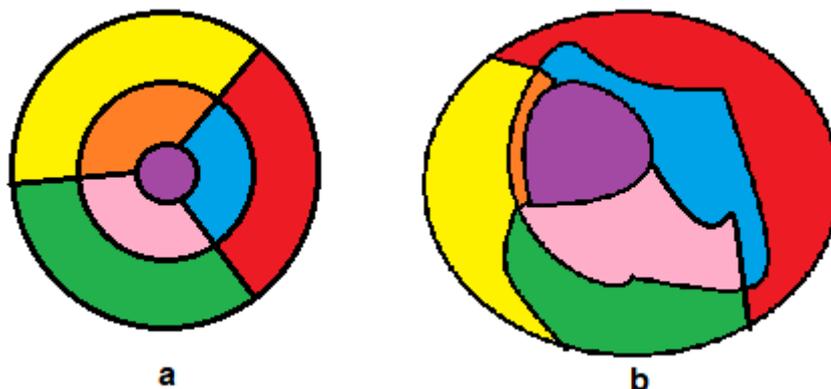


Fig.3

Trasformazione topologica che lascia invariati i numeri di facce, di vertici in cui si incontrano facce, di archi che congiungono vertici nelle due figure (a) e (b).

Possiamo anche tagliare la figura geometrica che malmeniamo, a patto di ricucirla avendo cura che i punti vicini nella mappa originale restino vicini nella mappa ricucita. Per esempio, i due **nodi** in Fig. 4 si possono ottenere solo tagliando, ad esempio tra A e B ,

facendo il nodo in modo lievemente diverso, e ricucendo in modo che A e B rioccupino le posizioni di partenza. Nondimeno, i due nodi sono topologicamente equivalenti.

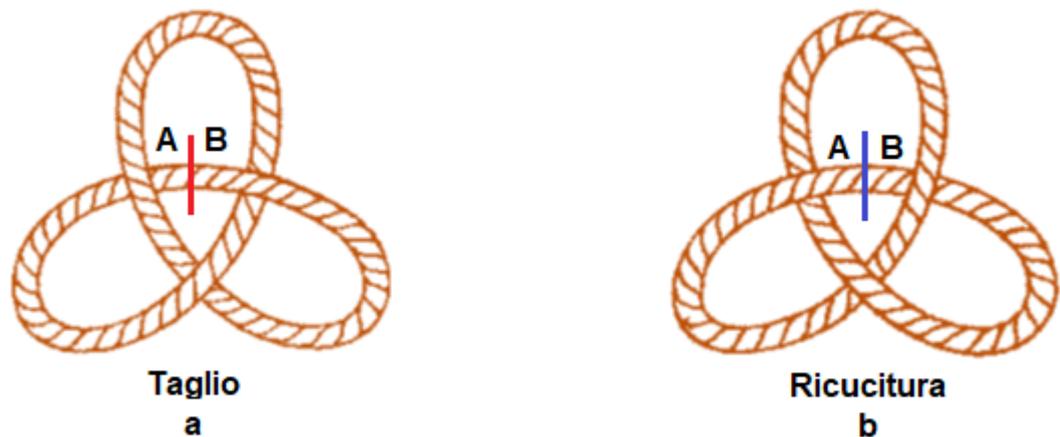


Fig.4

Non c'è modo di passare dal nodo (a) al nodo (b), che pure sono equivalenti topologicamente, senza tagliare la fune per esempio tra A e B, eseguire la trasformazione, e ri-incollare la fune portando di nuovo vicini i punti A e B.

Non possiamo fare buchi e lasciarli aperti. Chiaramente i valori degli angoli che si incontrano nei vertici, le lunghezze dei lati, le forme e aree delle facce, muteranno quando sottoporremo la membrana a tali trasformazioni. Tuttavia, certe proprietà della nostra mappa restano immutate, per esempio il numero di vertici, il numero di lati che concorrono in un vertice, il numero di facce - e il numero di colori che occorre perché paesi adiacenti non abbiano lo stesso colore, oltre a molte altre proprietà che per il momento non ci riguardano.

Per dimostrare il teorema, faremo uso di una formula *attribuita (1) a Eulero* che ci dà la **relazione fra il numero di facce, vertici e lati** per una mappa piana. Essa è fondamentalmente la stessa formula che vale per facce, vertici e lati di un poliedro anche irregolare, ma convesso per comodità e senza buchi per necessità (cioè non assimilabile a una ciambella o a un pretzel o simili).

La formula che utilizzeremo e la cui dimostrazione è data in appendice è:

$$F + V = L + 2$$

Dove F è il numero di facce, V il numero di vertici, L il numero di lati (o "confini" o "archi" in una mappa, "spigoli" in un poliedro).

Parte I: Le Mappe "REGOLARI".

Per dimostrare il teorema dei "Cinque Colori", tratteremo senza perdita di generalità un tipo particolare di mappe, le cosiddette mappe **regolari**, in cui

- (1) i confini sono linee curve, dette archi (anche degeneri, cioè segmenti di retta),
- (2) in ogni vertice o nodo si incontrano esattamente tre archi.

La prima ipotesi è facile da digerire, perché sappiamo che in topologia ogni segmento continuo di linea è equivalente a qualsiasi altro, stirando appropriatamente la mappa. La seconda richiede un po' più di fantasia: se in un vertice si incontrano più di tre archi (a), immaginiamo di sostituire al vertice un circoletto (b). Sul suo contorno si avranno sempre solo incontri di tre archi in ogni vertice, e quindi avremo una mappa regolare. Poi lo conetteremo a una faccia tale che sul contorno del circoletto compaiano colori diversi da quelli della "faccia madre" (d).

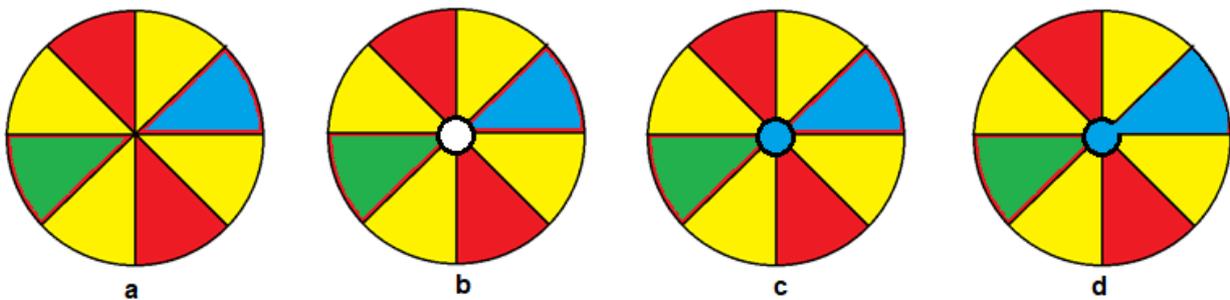


Fig.5

Trasformazione di una mappa qualsiasi in una "mappa regolare".

Ma se dimostreremo che per qualsiasi mappa regolare cinque colori sono sufficienti, questo sarà vero anche se, una volta provato il teorema, ridurremo i circoletti a un punto (c), tornando alla mappa di partenza, tanto più che, come sappiamo, un punto non è valido come confine che richiede di introdurre colori diversi nelle varie regioni che ivi convergono.

Effettivamente, nella colorazione del circoletto (c), vediamo che non possiamo scegliere come regione "madre" né una regione rossa né una regione gialla. Siamo sicuri che potremo trovare sempre una regione adatta? La risposta è sì. Se noi non potessimo trovare una regione adatta, vorrebbe dire che al vertice si incontrano almeno dieci regioni con cinque colori diversi. Ma allora il circoletto al centro avrebbe bisogno di un sesto colore, ed avremmo automaticamente dimostrato che il teorema dei cinque colori è falso.

Parte II, Corollario al teorema di Eulero: Ogni mappa regolare deve contenere almeno una curva con numero di archi inferiori a 6.

Sia $F(n)$ una faccia contornata da n archi ovvero lati L .

Il numero totale di facce è quindi:

$$F = F(2) + F(3) + F(4) + \dots$$

(Veramente, ci sarebbero anche facce con un solo lato, come ad esempio un cerchio, ma queste sono per forza isolate, perché non appena le attacchiamo da qualche parte, creiamo lati e vertici).

Ma ogni arco ha 2 estremi, o vertici, o nodi, e in ogni vertice si incontrano 3 archi (**Mappa regolare!**). Possiamo dire che $2L/3 = V$, oppure che "2L è il triplo dei vertici". Quindi

$$2L = 3V \quad \text{da cui} \quad 4L = 6V$$

Inoltre, ogni faccia limitata da n archi ha n vertici e, per costruzione (**Mappa regolare!**), in ogni vertice convergono tre facce. Ricordando che $F(n)$ = faccia con n archi:

$$2F(2) + 3F(3) + 4F(4) + \dots = 3V = 2L$$

Vale la formula di Eulero già menzionata (e da dimostrarsi in appendice) che $F + V - L = 2$, da cui $6V - 6L + 6F = 12$

$$\text{Sostituendo } (6V = 4L): \quad 6F - 2L = 12$$

$$6 [F(2) + F(3) + F(4) + F(5) + F(6) + F(7) + \dots] - [2F(2) + 3F(3) + 4F(4) + \dots] = 12$$

$$(6-2)F(2) + (6-3)F(3) + (6-4)F(4) + (6-5)F(5) + (6-6)F(6) \text{ nullo} + (6-7)F(7) \text{ negativo} + \text{termini tutti negativi} = 12 \text{ (positivo)}$$

Perciò è necessario che almeno uno dei quattro primi termini positivi esista, per produrre un secondo membro 12, positivo.

Parte III. Teorema dei cinque colori (dimostrazione per assurdo).

È opportuno fare alcune ovvie considerazioni.

A) La prima considerazione è che il concetto di colore non è essenziale al teorema in esame. Possiamo ad esempio assegnare a ogni colore un numero, per esempio giallo =1, blu =2, verde =3, rosso =4, viola= 5 eccetera. A questo punto si parlerà di colore 1, o 2 o 3 o 4 o altro, e due mappe saranno equivalenti se ai numeri 1,2,3,4 si assegneranno colori diversi, purché lo si faccia con coerenza. Ma a questo punto possiamo tenere fissi i colori e permutare i numeri, e ancora le mappe saranno equivalenti. In altre parole, possiamo permutare i numeri dei colori o i colori fra loro, ottenendo sempre mappe equivalenti.

B) La seconda considerazione è che la dimostrazione da me scelta (in verità non l'unica né la più elegante, ma forse la più intuitiva) farà affidamento su un'applicazione del teorema di Jordan, che ci insegna che un punto è all'interno di una curva (chiusa) di Jordan se un percorso che ci porta ad un punto all'esterno deve attraversare un *numero dispari* di volte la curva. Si consideri ora che se un punto, o anche un'intera regione, considerata come insieme di punti, è all'interno di una curva chiusa di Jordan e una seconda regione è all'esterno della curva, esse non possono avere punti di contatto, cioè non possono essere contigue. Quindi, se un percorso da una regione a un'altra deve attraversare *una volta* (o un *numero dispari di volte*) una curva di Jordan, ciò significa che una regione è all'interno della curva e l'altra all'esterno, e quindi non possono essere contigue, e i loro colori non hanno relazione l'uno con l'altro (per esempio possono essere eguali), a meno che andiamo a cercarci dei problemi facendo correre la curva di Jordan proprio sul confine (neutro), il che dipende solo da noi (anche il Teorema di Jordan – dimostrato per un caso particolare - è in appendice).

C) Modernamente, appare più semplice trasformare la mappa in un grafo "planare" costituito da punti (*vertici, nodi*) e linee (*archi*) che li uniscono, trasformando le regioni in vertici e i confini tra regioni in archi che uniscono i vertici. Il grafo è *planare* se gli archi non si scavalcano mai, ma si incrociano sempre e solo in un nodo (ovvero vertice). Si tratta poi di colorare i vertici in modo che due vertici uniti da un arco siano sempre di colore diverso.

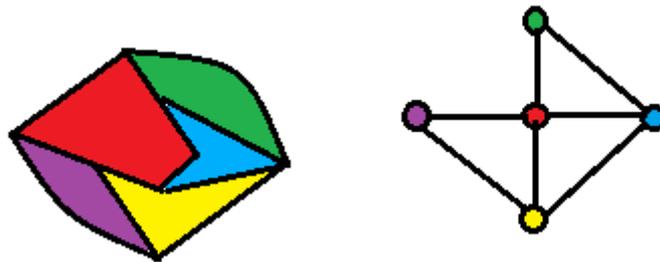


Fig.6
Mappa e grafo equivalente

D) Partendo sia dalle mappe che dai grafi equivalenti esistono diverse dimostrazioni. Tra quelle che sono basate sui grafi ce ne sono alcune particolarmente semplici o eleganti. Per quanto mi riguarda preferisco utilizzare una dimostrazione del problema classico, quello della colorazione delle mappe.

Mi scuso ora per la grafica primitiva: solo i vertici in cui convergono (almeno) tre lati sono veri vertici o nodi. Gli altri sono solo angoli e possono essere sostituiti da una curva.

Su questa base, possiamo partire.

Sia ora $M^*(n)$ la mappa più piccola, regolare, che NON può essere colorata con cinque colori, dove n è il numero di regioni. Chiameremo M^* "mappa minimale".

a) Se $n \leq 5$, bastano evidentemente $n \leq 5$ colori. Ne segue che M^* - se esiste - deve avere almeno 6 regioni.

b) E' anche evidente che **nessuna regione di M^* può avere meno di cinque lati, ovvero cinque "vicini"**. Supponiamo che la regione **A** che ha il massimo numero di lati inferiore a cinque ne abbia quattro (Fig. 7 a).

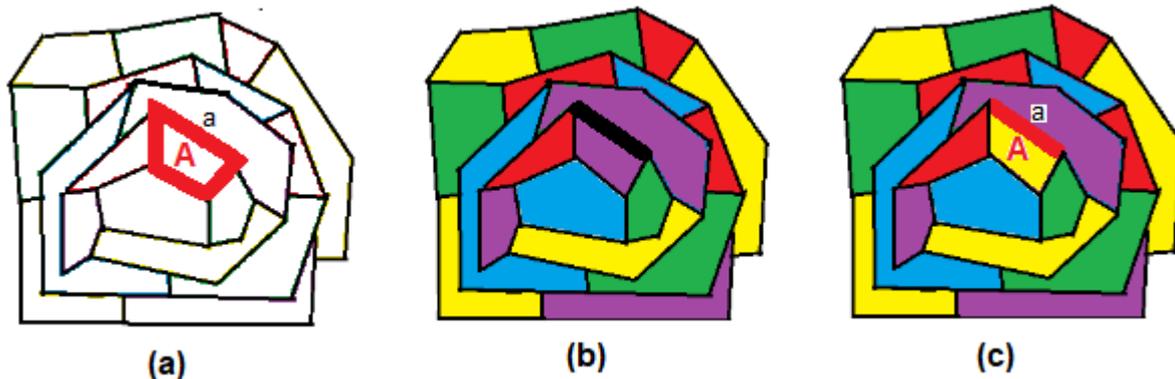


Fig.7

Una mappa minimale $M^*(n)$ non può contenere regioni con meno di cinque lati.

In questo caso si può eliminare la regione con 4 lati, cancellando uno dei lati di confine, per esempio, in questo caso, il lato (a).

La mappa risultante Fig. 7(b) avrebbe $n-1$ regioni. Ma $M^*(n)$ è la più piccola mappa non colorabile con cinque colori, mentre $M^*(n-1)$, avendo un numero inferiore di regioni, deve essere colorabile con cinque colori. Coloriamo $M^*(n-1)$ con 5 colori.

Se ora rimettiamo al suo posto d'origine il lato che avevamo cancellato Fig.3(c), la regione che abbiamo ricreato ha sempre quattro vicini di quattro colori (tutti diversi o magari in parte eguali, anche a coppie) e noi possiamo assegnarle il colore o uno dei colori disponibili. (Le cose sono anche più semplici se la regione col massimo numero di vicini inferiore a cinque ne ha solo tre o due).

Dunque anche la nostra $M^*(n)$ è colorabile con cinque colori. Una $M^*(n)$ non può avere regioni con meno di cinque vicini.

c) Un corollario è che **$M^*(n)$ deve contare almeno 12 facce con cinque vicini o lati**: infatti il corollario al teorema di Euler dice che $F(5)$ più termini negativi o nulli deve dare 12.

Dunque la $M^*(n)$ deve avere almeno una regione con cinque regioni adiacenti, e $M^*(n-1)$ - **quali che siano i numeri di lati delle altre facce** - deve essere colorabile con cinque

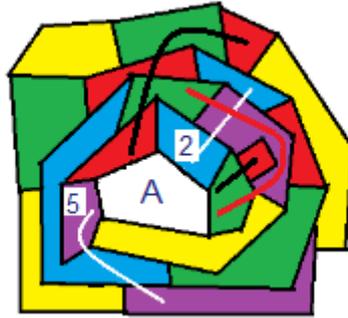


Fig.9

Alcune catene possibili formate da coppie di colori (Catene di Kempe).

Le regioni circostanti la A sono numerate in senso orario. Consideriamo le regioni 2 e 5, ai due lati opposti di 1. Ora formiamo le possibili catene con i colori viola e azzurro alternati. Esse sono due, visibili in Fig. 9, in cui le due catene viola e azzurre sono unite da un tratto *bianco*.

Le due catene non si congiungono. Come vedremo, se le due catene si congiungessero, i due colori in 2 e 5 avrebbero un colore obbligato, eguale se la catena ha un numero dispari di "giunti" (nel qual caso la regione A confinerebbe con solo 4 colori) o colore diverso se i giunti fossero in numero pari. Non congiungendosi, possiamo scambiare i due colori viola e azzurro in tutti i giunti di una delle due catene senza influenzare l'altra, in modo da avere due colori eguali che si affacciano su A, come in Fig. 10, in cui i colori nuovi sono colorati più chiari. La regione A può quindi essere colorata in azzurro.

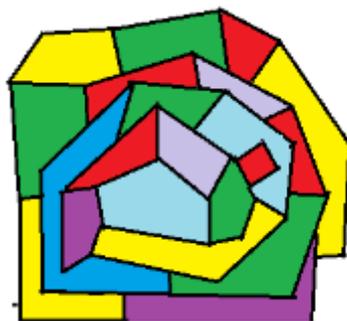


Fig.10

Caso in cui le due catene (azzurre-viola) partenti dalle regioni 2 e 5 sono colorate in modo da affacciarsi sulla regione centrale con due colori diversi. I due colori della catena che parte da 2 sono stati scambiati fra loro ovunque.

Al momento dello scambio dei due colori, le regioni adiacenti a ogni giunto possono trovarsi nella seguente situazione:

- 1) Nessuna di esse ha uno dei due colori, per cui lo scambio di questi non influenza le altre regioni.
- 2) Una delle regioni ha uno dei due colori, nel qual caso essa fa parte della catena e cambia colore.
- 3) Più regioni hanno uno dei due colori, e allora abbiamo diverse catene che si diramano da un giunto. Tutte le catene cambiano colore come prescritto. (Qui stiamo considerando il caso che nessuna di esse si congiunga alla catena che parte dall'altra regione confinante con A).

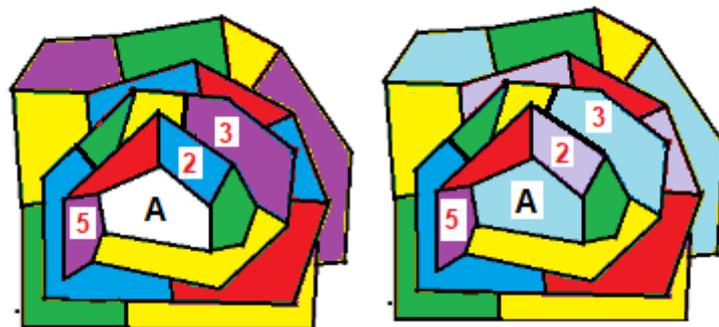


Fig. 11

Esempio di catena di Kempe blu-viola partente dalla regione 2, con diramazione nella regione 3.

Vediamo ora il caso in cui la catena di colori alternati, o una diramazione della catena a colori alternati, giunge alle due regioni contigue alla regione da colorare. Come si è detto, una catena di un numero dispari di elementi automaticamente permette di porre nella regione da colorare il colore che non si affaccia su di essa. La difficoltà viene dalla catena di un numero pari di elementi, che porta al confine della regione da colorare un colore diverso da quello di partenza. Possiamo tuttavia tracciare una *curva di Jordan* incompleta stando esclusivamente sulla catena in questione. Questa curva passa attraverso una successione di regioni alternativamente, diciamo, blu e viola, più la regione da colorare.



(a)

(b)

(c)

Fig.12
Colorazione della mappa (a) con cinque colori

Noi possiamo temporaneamente togliere il confine con la regione viola e colorare di blu la regione vuota. Infatti, ora la mappa può essere colorata con cinque colori, *avendo una regione in meno*. Inoltre la curva di Jordan può essere completata. A questo punto non si può disegnare nessuna catena che attraversi la curva di regioni alternativamente viola e blu (che abbandoneremo al loro destino). Ad esempio, le tre catene rosso/verde (linee nere) che partono dalla regione da colorare restano due da una parte e una dall'altra della curva di Jordan (o due all'interno e una all'esterno), o della catena di Kempe, della quale fanno parte solo regioni blu o viola. Possiamo quindi scambiare i colori di una o due catene rosso-verdi, in modo da rendere adiacenti alla regione originariamente da colorare due colori eguali, e lasciarci così libero il secondo.

Si vede ora perché avevamo richiesto che le due regioni all'inizio delle catene di Kempe da studiare non fossero adiacenti: non ci sarebbe stato spazio per alcun'altra regione compresa nella curva di Jordan, ma, soprattutto, non ci sarebbe stato modo di colorare le due regioni con lo stesso colore, in quanto sarebbero sempre state adiacenti sulla periferia della regione A.

Scambiamo i colori delle due catene (rosso-verdi) racchiuse nella curva di Jordan, che partono dalla regione originariamente verde adiacente a quella da colorare, rimettiamo il confine e coloriamo del colore giusto (in questo caso verde) la regione A da colorare. Abbiamo così colorato con cinque colori la mappa che avrebbe dovuto essere la più piccola impossibile da colorarsi con cinque colori. Di qui l'assurdo.

E con ciò, la dimostrazione del teorema è completa.

NOTE

(1) In realtà la relazione fra i numeri di Vertici, Lati, Facce sembra sia stata scoperta nella sua essenza da Descartes (Cartesio) circa un secolo prima di Euler. In quanto alla dimostrazione, ora si usa quella di Cauchy (1811).

(2) Le “catene di Kempe” furono introdotte da Alfred Kempe nel 1879, nella sua dimostrazione del teorema dei Quattro Colori (più ambizioso del Teorema dei Cinque Colori), secondo il quale per colorare una mappa bastano quattro colori. Per questo si veda, in questo sito e altrove, il mio breve saggio:

<http://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2019/04/20/quattrocolori.html>.

La dimostrazione di Kempe fu ritenuta valida per undici anni, ma fu dimostrata erranea da Percy Heawood nel 1890. In altre parole, un’analisi della regione con cinque vicini permette, come abbiamo fatto, di dimostrare il teorema dei cinque colori, ma per dimostrare quello dei quattro colori occorrono strumenti nuovi, che al tempo di Kempe non erano ancora stati escogitati.

APPENDICI.

1) $F+V=L+2$ (DESCARTES, 1640; EULER, 1742)

I. Abituale dimostrazione.

Eulero per prima cosa prende il poliedro, fa un buco in una faccia, e lo spiaccia su un piano. Tutto (angoli e lunghezze e aree) viene deformato, ma il numero di facce del poliedro non varia, il numero di lati neppure, e il numero di vertici nemmeno. La relazione tra queste tre grandezze varrà per la mappa sul piano come sul poliedro, purché si abbia l'avvertenza di notare che il buco fatto in una faccia del poliedro, eventualmente stirato in una sfera, diventa in pratica una faccia esterna della mappa, come si vede dal seguente disegno:

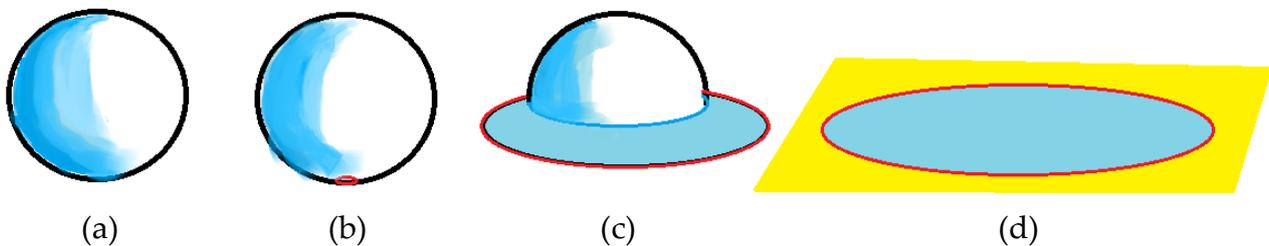


Fig.1A

Procedimento di Eulero per trasformare una sfera (a) in un disco (d): buco come in (b) e progressivo schiacciamento della sfera e allargamento del buco. Il buco produce la faccia infinita gialla (ma così la sfera ha due facce...)

La dimostrazione abituale del teorema in esame risale a Cauchy, allora ventenne (1811), ed è una dimostrazione col metodo dell'induzione matematica. Le dimostrazioni per induzione mi lasciano sempre con la bocca amara: quello che Cauchy fa (e la maggior parte delle dimostrazioni scolastiche fanno) è dimostrare che:

“Se la formula $F + V = L + 1$ è valida per una mappa con F facce, essa è valida anche per una mappa con $F-1$ facce. Ma questo vuol dire che se la formula è valida per una mappa con $F-1$ facce, essa è valida per una mappa con F facce (ragionamento per me non immediato). Poiché è valida per un mappa con una sola faccia (Cauchy, grazie a una “triangolazione” preliminare della mappa, giunge a un’ultima faccia che è un triangolo, per cui vale la relazione $1+3=3+1$), allora è valida per tutte le mappe con un numero superiore di facce (dove F è il numero di facce, V il numero di vertici, L è il numero di lati). Qui, però, Cauchy deve aggiungere una faccia, la faccia esterna al poligono formato dal poliedro spiacciato sul piano, la faccia gialla di Fig. 1°, che però per la sfera non esiste, per ottenere la relazione $F+V=L+2$.

A parte il fatto che la dimostrazione è illusoriamente semplice, e alquanto macchinosa, la domanda che sorge spontanea è: *da dove piove la relazione $F+V=L+2$?*

Il metodo che vorrei seguire per dimostrare questa formula è invece il metodo più antico,

che risale, si pensa, a Descartes (fu trovato nelle sue note postume: Descartes – *Cartesius* - morì nel 1650). Introduurrò però una svolta semi-euristica estendendo il procedimento di Descartes al piano. Se il mio procedimento non convincerà il lettore curioso, egli potrà sempre seguire il procedimento di Courant & Robbins (*What is Mathematics, 1941, Capo V, §1*), basato sul metodo di Cauchy.

Supponiamo di avere un poliedro, per esempio una piramide con cinque facce come quella che ho disegnato in prospettiva in Figura 2A(a), e di schiacciarlo in modo che la piramide di cinque facce combaci con la faccia inferiore (Fig.2A (b)). Abbiamo quindi due pentagoni identici, appiattiti come una sogliola. Concentriamoci ora sulla faccia superiore, che è una “mappa planare” simile a quella che abbiamo trattato nel nostro teorema dei cinque colori, anche se non “regolare”.

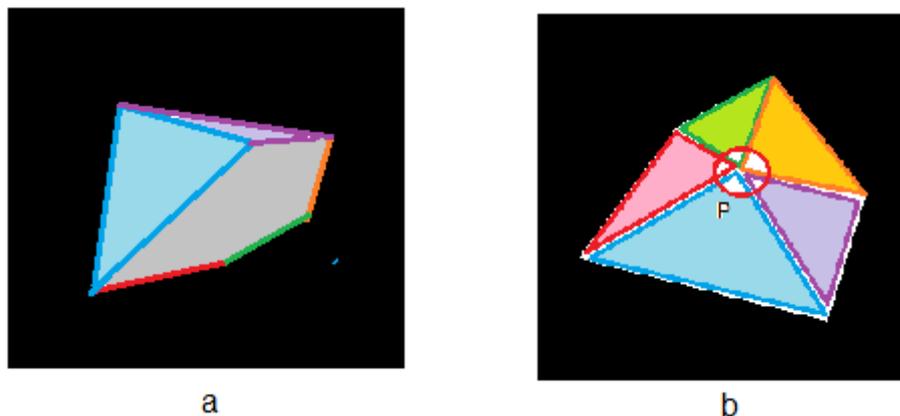


Fig 2 A

Piramide pentagonale e doppio poligono equivalente (doppio contando il pentagono grigio in (a), non visibile in (b))..

1) Il primo punto da tener presente è che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati, regolare o no, è data dalla somma di tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due. Sembra una dimostrazione difficile, ma è banale.

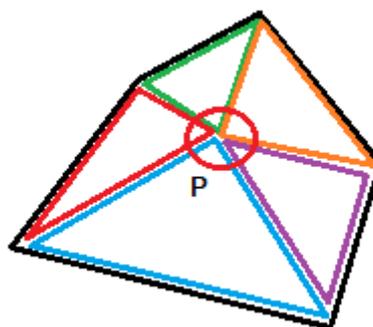


Fig.3A

La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è n Piatti -2.

Semplicemente, si sceglie un punto qualunque all'interno del poligono e si tracciano le congiungenti ai vertici: nella nostra ex-piramide il gioco è già fatto. Si divide così il poligono in n (qui 5) triangoli. La somma degli angoli interni di ciascuno di questi triangoli, quale che sia la sua forma, è 1 angolo piatto. Quindi il totale è n angoli piatti. Però gli angoli al centro P formano un angolo giro (2 piatti, 360° , 2π radianti), e quindi il totale degli angoli **interni** ai vertici vale $(n-2)$ Piatti.

Incidentalmente, ogni angolo del poligono avrebbe un angolo totale di 2Piatti, di cui una parte va a formare i 2Piatti interni. Per cui, l'angolo **esterno** totale è $(2n - (2n - 2))$ Piatti, cioè eguale a 2Piatti.

Calcoliamo adesso in due modi l'ampiezza totale degli angoli interni, in termini di angoli piatti nella nostra mappa planare di F facce, L lati, V vertici. Ognuna delle F facce di n lati contribuirà n-2 angoli piatti. Quindi, avremo che la somma totale è $TOT = F(n-2)$ Piatti. Ogni lato è comune a due facce. Quindi $F n = 2 L$. In conclusione, la somma degli angoli *interni* sulla mappa sarà:

$$TOT \text{ ANGOLI} = 2(L-F)\text{Piatti.}$$

Ora valutiamo gli angoli in altro modo. Ad ogni vertice si incontra un numero variabile di facce, con angoli diversi. Tuttavia, sul piano ogni vertice contribuisce 2 angoli piatti. Ma abbiamo il confine esterno: l'intero diagramma è un poligono, e la somma degli angoli esterni di un poligono, come si è visto, è ancora 2 Piatti. Perciò il totale è $V \times 2\text{Piatti} - 2\text{Piatti}$. **Questi ultimi 2Piatti li potremmo chiamare il "difetto angolare". Questo difetto angolare, sul piano, si manifesta solo sul perimetro del poligono e in definitiva, è il contributo del solo poligono di contorno.** Nello spazio, un difetto angolare parziale si manifesta su ogni vertice, come mostrerò negli esempi sottostanti, *ma noi assumeremo che nella trasformazione topologica che ha ridotto il poliedro a una figura piana, ma con due facce, il valore totale non muti. Questo è il mio passaggio semi-euristico.*

I due risultati devono essere eguali, quindi:

$$2(L-F)=2V-2$$

$$L-F=V-1$$

$$V+F=L+1$$

A questo punto siamo dove arriva Cauchy-Eulero col metodo induttivo. Ma ora occorre trovare una faccia da aggiungere, perché la formula cercata è diversa. Cauchy-Euler, come si è detto, inventano perciò la faccia esterna come in Fig.1 A, per cui $L-F^*=V+2$, dove F^* è il numero di facce aumentato della faccia esterna.

Ma secondo me avremmo mancato un punto essenziale, che invece non sfuggì a

Cartesio. Non occorre una faccia esterna infinita come in Fig.1 A: basta ricordare che esiste la faccia sottostante del poliedro, il cui difetto angolare è pure 2Piatti .
 L'equazione $2(L-F^*)\text{Piatti} = (2V-4)\text{Piatti}$, avendo incluso in F^* anche la faccia inferiore, diventa $L-F=V-2$.

Coloro a cui non piace l'aver reso una superficie piatta a due facce equivalente topologicamente a un solido, vedano i seguenti esempi:

Si prenda un cubo e si calcoli "il difetto angolare". Poiché a ogni vertice del cubo noi perdiamo uno degli angoli retti, e ci sono otto vertici, il difetto angolare totale è 4Piatti .

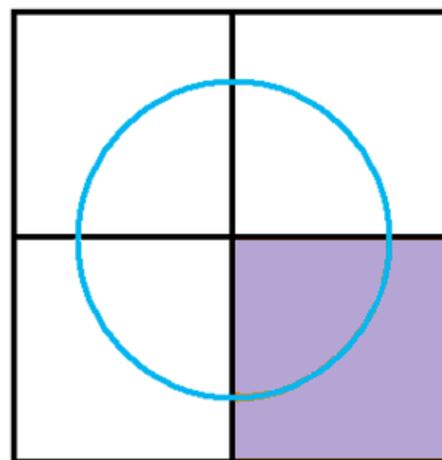
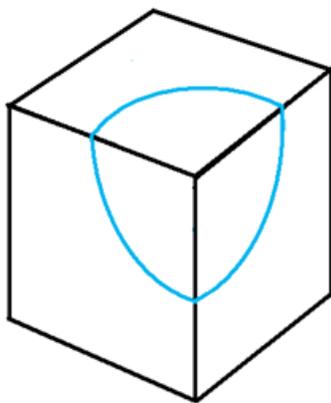


Fig. 3A
 Difetto angolare di $\frac{1}{2}$ Piatto ad ognuno degli otto vertici di un cubo

Questo risultato, che il cubo ha un "difetto angolare" uguale a 4Piatti , curiosamente, vale anche per ogni altro poliedro regolare o no. Intanto, evidentemente, vale per un parallelepipedo. Poi, come esempi, si vedano i difetti angolari di tetraedro e ottaedro, oltre al cubo.

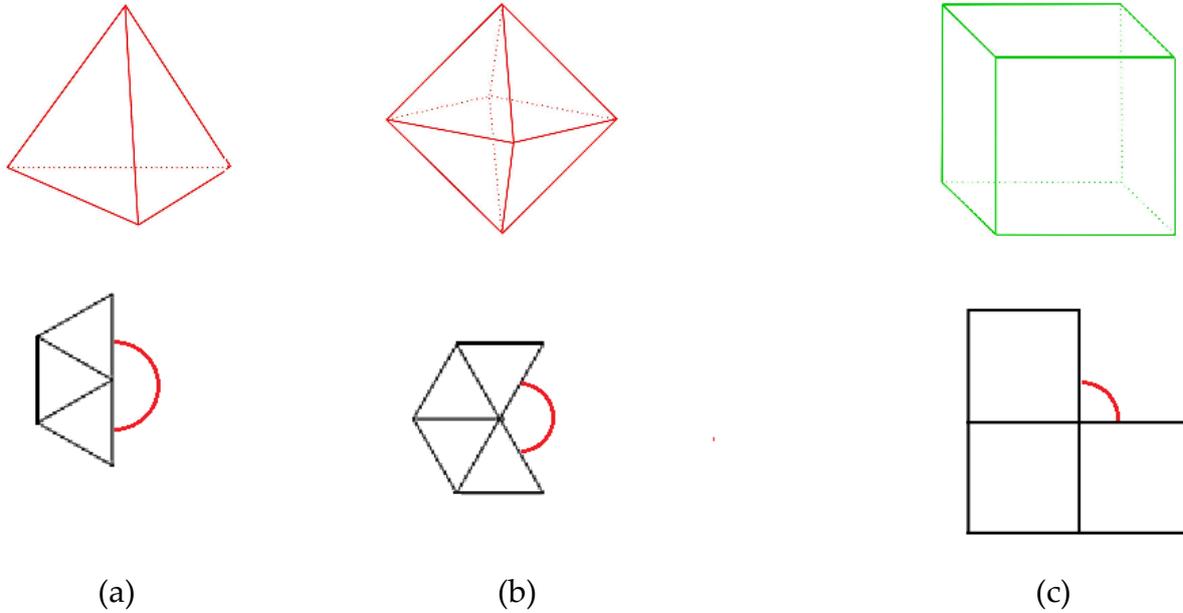


Fig. 4 A

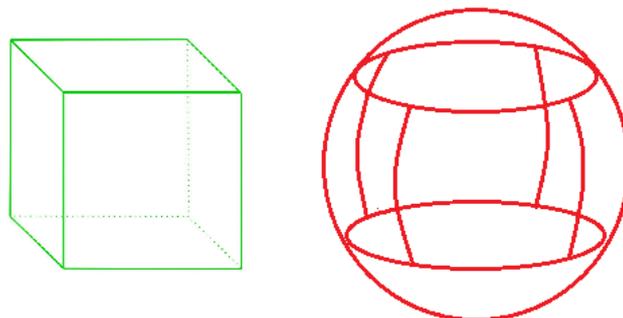
Anche nel tetraedro e nell'ottaedro il difetto angolare totale è di 4Piatti (vedi testo).

Nel **tetraedro** (a) ad ogni vertice si incontrano tre facce che contribuiscono un angolo di 60 gradi ciascuna, un terzo di piatto. Le tre facce insieme contribuiscono un angolo Piatto; il difetto, marcato in rosso, è quindi 1 angolo piatto. Ci sono 4 vertici, difetto angolare 4Piatti .

Nell'**ottaedro** (b) ad ogni vertice si incontrano quattro facce che anche loro contribuiscono un terzo di Piatto ciascuna. Il difetto angolare è di $2/3$ di Piatto. Ci sono sei vertici...di nuovo il difetto angolare totale è 4 Piatti .

(I casi del dodecaedro e dell'icosaedro sono lasciati come esercizio).

Possiamo aggiungere che teoremi successivi (sostanzialmente basati sul concetto di curvatura gaussiana, dovuta a Gauss (1777-1855)) dimostrano che anche la sfera ha un difetto angolare di 4 Piatti . In altre parole, se gonfiamo il nostro cubo fino a farlo diventare una sfera, il difetto angolare totale non cambia. Mentre nei poliedri il difetto angolare è concentrato nei vertici, nella sfera è diffuso su tutta la sfera, ma il risultato finale è lo stesso: 4 Piatti , o 4π , o 720° .



(a)

(b)

Fig. 5 A

Un cubo può essere gonfiato su una sfera, e il difetto angolare resta lo stesso (4 Piatti).

Sembra dunque che Descartes si sia imbattuto in un “invariante topologico”. Ma – e qui è il passo euristico del mio percorso – se gonfiando il cubo su una sfera il difetto angolare resta 4 Piatti, non sarà che appiattendo il cubo come una sogliola l’invariante resti lo stesso? E ciò non varrebbe per qualsiasi poliedro?

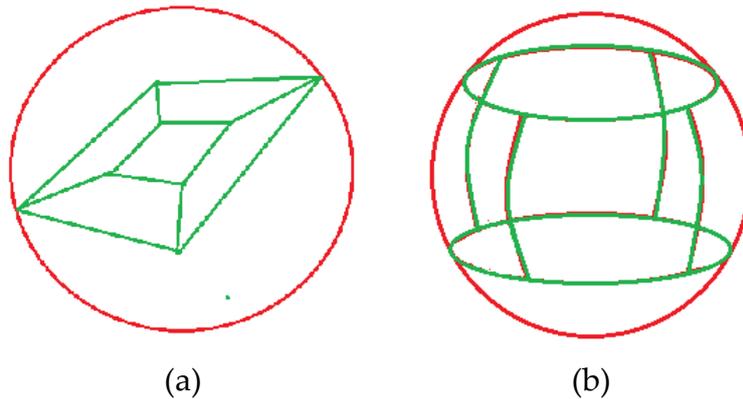


Fig.6 A

Il difetto angolare del cubo è invariante (4Piatti) sia che il cubo sia gonfiato in una sfera che se il cubo è appiattito come una sogliola.

Non sarebbe così strano. Con questa manovra non abbiamo perduto nessuna faccia (una è rimasta al di sotto) e tanto il poligono superiore quanto quello inferiore hanno un difetto angolare di 2Piatti. Totale 4 Piatti. Misurando in angoli piatti, l’angolo totale deve essere:

$$2(L-F)\text{Piatti}=(2V-4)\text{Piatti}$$

$$L-F = V-2$$

E con questo abbiamo dato ragione della formula di Eulero, come somma degli angoli “interni” del poliedro, eguagliata al totale possibile (2 Piatti per vertice) meno il difetto “sferico” di 4Piatti. **E l’abbiamo estesa al piano senza far piovere formule dal cielo, scavare buchi o introdurre facce fantasma.**

Non solo, ma per il nostro solido sogliola a due facce abbiamo *dimostrato* (due Piatti per una faccia e due Piatti per l’altra faccia identica sottostante) il valore del difetto angolare, e quindi lo abbiamo anche dimostrato per i solidi non sogliole, cioè per tutti i poliedri, regolari e non, perché tutti si possono ridurre a una simile sogliola – ciò che in fin dei conti fece anche Cauchy nel 1811.

Noto che questa idea di risolvere una superficie curva in un mosaico di facce piane, basandosi sul fatto che in generale il difetto angolare è immutato, è alla base del “Regge Calculus”, da Tullio Regge (1931-2014), il maggior fisico teorico italiano della seconda

metà del Novecento. Il Regge Calculus fu alla base dell'escursione di Tullio Regge nel campo della Relatività Generale.

NOTA

Una curiosità che si rivela eventualmente essere qualcosa di assai più profondo, è una regoletta per ricordare i segni.

Topologicamente parlando, i solidi si dividono in classi i cui membri sono deformabili l'uno nell'altro e hanno le stesse proprietà topologiche, a seconda del valore di una certa quantità detta "caratteristica", e tradizionalmente indicata con χ . L'abbiamo già incontrata nel teorema di Cartesio-Eulero: è il numero 2 che compare nell'espressione $F+V=L+2$.

Ora, sia $k(0)$ il numero di elementi adimensionali, cioè punti o vertici; $k(1)$ il numero di elementi unidimensionali, cioè lati; $k(2)$ il numero di elementi bidimensionali (le facce). Una superficie è bidimensionale e i sottospazi con due dimensioni hanno il numero massimo di dimensioni compatibile con la superficie. Ma, se passassimo a solidi tridimensionali in tre dimensioni avremmo anche un $k(3)$, e in quattro dimensioni avremo un $k(4)$ e via dicendo.

Si può dimostrare in generale che la caratteristica è data da:

$$\chi = k(0) - k(1) + k(2) [\dots - k(3) + k(4)\dots]$$

in cui gli elementi con un numero pari di dimensioni entrano con segno positivo, quelli con un numero dispari di dimensioni con segno negativo. Nel nostro caso la caratteristica vale 2. Se vogliamo applicare la regola a superfici bidimensionali, possiamo quindi scrivere:

$$2 = V - L + F [\dots - k(3) + k(4)\dots]$$

2) TEOREMA DI JORDAN

Nella dimostrazione del teorema dei cinque colori si è fatto ricorso (pur senza grande insistenza) al teorema delle curve di Jordan per i poligoni. *Il teorema stabilisce che una curva semplice (che non si incrocia) chiusa, divide i punti (non appartenenti alla curva C : questi sono sul confine e non si sa da che parte stanno) di un piano in due domini distinti (senza punti comuni), di cui C costituisce il contorno comune.* Daremo una dimostrazione di questo teorema per il caso in cui C è un poligono chiuso P . Qui seguo il Courant & Robbins, ma con alcune precisazioni che mi sono sembrate necessarie.

(Per convincermi dei passi successivi, ho dovuto aggiungere la considerazione che uno dei vantaggi di dimostrare il problema per un poligono chiuso è che questo può essere sempre completamente racchiuso, ad esempio, in una circonferenza di raggio R sufficientemente grande).

Avremo dunque i punti divisi in due classi, che chiameremo A e B , tali che due punti appartenenti a una stessa classe possano essere sempre congiunti da una linea per esempio una poligonale, che non attraversa mai il contorno P , mentre per congiungere qualsiasi punto della classe A a qualsiasi punto della classe B la poligonale deve attraversare P . Una delle due classi formerà l' "interno" e l'altra l' "esterno" del poligono.

Per incominciare si sceglie nel piano una **direzione fissa** non parallela a nessuno dei lati del poligono. Questo può essere fatto, perché i lati di P sono in numero finito. Su questa direzione definiremo un senso.

Perché non vogliamo che d sia parallela a nessuno dei lati di P ? Perché se lo fosse, e noi scegliessimo due punti sulle estensioni di un lato parallelo a d , la retta che li congiunge avrebbe un numero infinito non contabile di punti in comune con P .

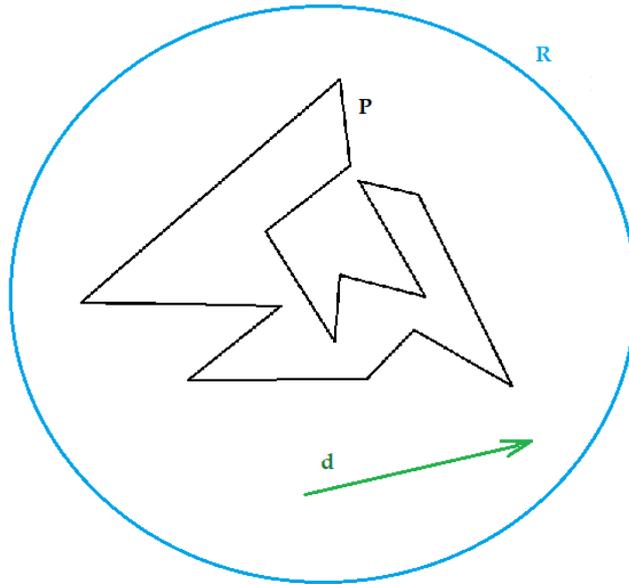


Fig.2

Poligono P , contenuto in un cerchio R . La direzione d ha un senso e non è parallela a nessuno dei lati di P

Ora diciamo che il punto $p(A)$ contenuto nel cerchio R appartiene a A se la semiretta che parte da $p(A)$ in direzione d , nel verso indicato interseca il poligono P in un **numero pari di punti prima di raggiungere il cerchio R** . Diremo di questi punti che hanno parità **pari**. Diremo invece che il punto $p(B)$ appartiene alla classe B , se una simile semiretta partente da $p(B)$ con direzione e verso assegnati interseca il poligono P in un **numero dispari di punti**. Diremo che i punti della classe B hanno parità **dispari**.

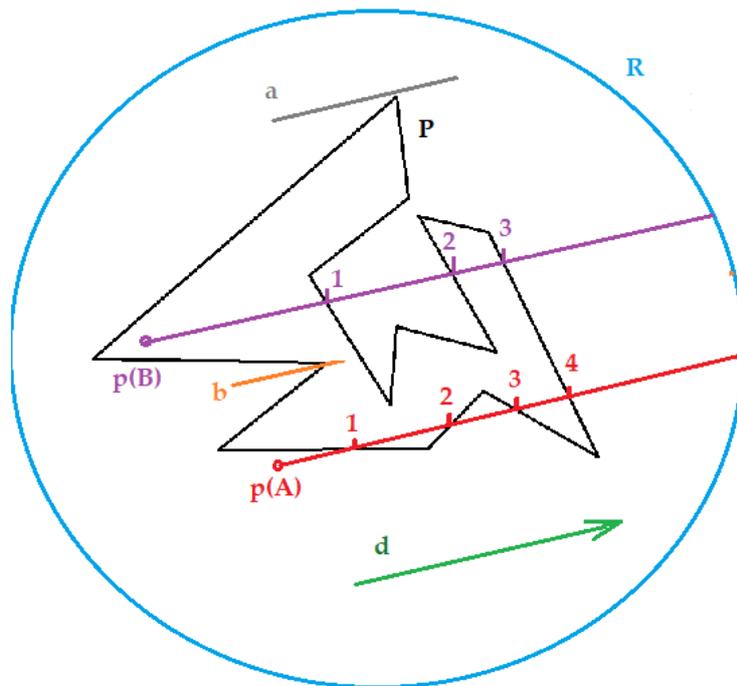


Fig.3

La situazione di $p(A)$ e $p(B)$ è illustrata in Fig.3.

Può accadere come nei casi a e b che la semiretta incontri un vertice. Allora l'intersezione al vertice conterà per 2 (cioè non conterà affatto, in quanto non cambierà la "parità" del numero di intersezioni) se i due lati che si incontrano in quel vertice sono da una stessa parte della semiretta, come nel caso a) e conterà per 1 se i due lati che si incontrano nel vertice sono da bande opposte della semiretta (caso b).

Diremo che due punti hanno la stessa parità quando appartengono alla stessa classe, A o B. *Dunque a ogni punto si assegna una data parità in base a quante volte incontra P la semiretta in direzione d e verso stabilito.*

Per un segmento, diremo che tutti i punti hanno la stessa parità **se il segmento non interseca P** (che sia all'interno o all'esterno di P).

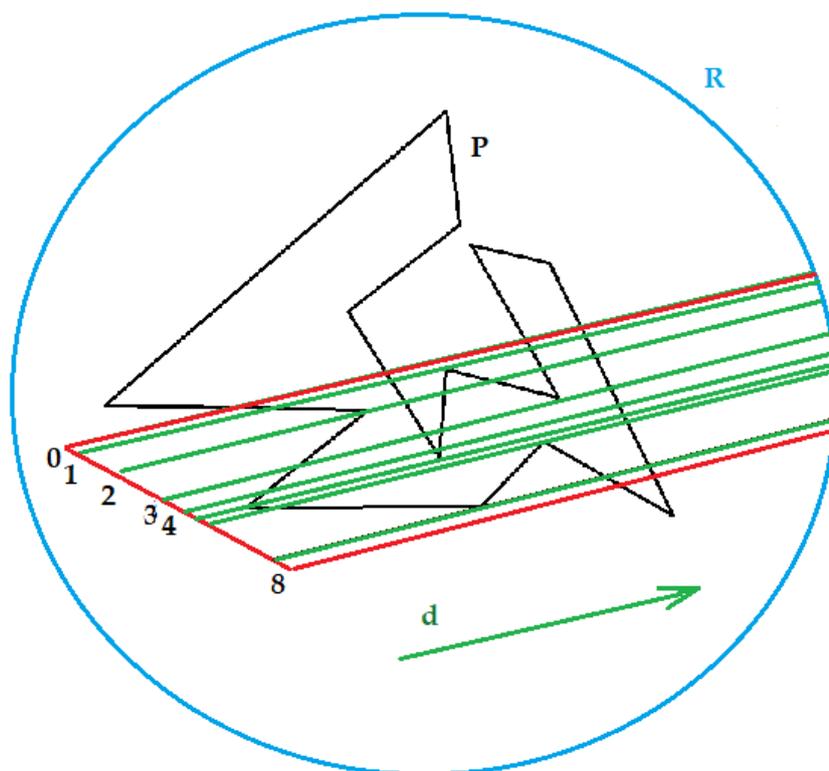


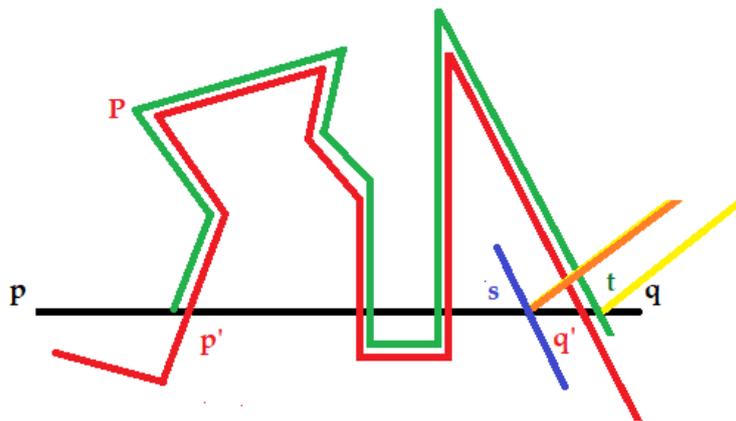
Fig.4

Si veda la Fig.4. Un punto si muove sul segmento $(0,8)$ partendo da zero, punto che, come si controlla, ha parità pari, in quanto la semiretta che ne parte e procede parallela a d incontra quattro volte il poligono P. Fino a che la semiretta partente dal punto in movimento non incontra un vertice la parità non viene messa in discussione. La semiretta che parte da 1 incontra un vertice, ma i lati che vi si incontrano sono dalla stessa banda della semiretta parallela a d , e quindi non cambiano la parità del punto 1 rispetto al punto 0. La semiretta che parte da 2 incontra un vertice che di per sé vale 1, ma sostituisce

un'intersezione di valore 1, e quindi non cambia la parità. Eccetera. Infine la semiretta che parte da s incontra due volte P .

Dunque, per connettere due punti $p(A)$ e $p(B)$, è necessario cambiare parità, e quindi la nostra poligonale (anche detta "spezzata", cioè una successione continua di segmenti che hanno un estremo comune) deve aggiungere un'intersezione con P , cioè **attraversare P** , altrimenti la parità di $p(A)$ e $p(B)$ rimane la stessa.

Si può dimostrare che **due punti della stessa classe possono essere congiunti da un cammino poligonale che non interseca P** . Siano p e q i due punti in questione. Se il segmento che congiunge direttamente p e q non interseca P , esso è evidentemente il cammino cercato. Altrimenti, sia p' il primo dei punti di intersezione e q' l'ultimo di tali punti. Seguiamo dapprima il segmento $p-p'$. Poco prima di p' incominciamo a seguire il poligono P , e lo seguiamo senza mai attraversarlo fino a che ritorna su $p-q$ in t , tra q e q' , e vicinissimo a q' (cammino verde). Se si riesce a dimostrare che questo cammino interseca $p-q$ nel punto t tra q e q' , allora si può continuare il cammino da t a q senza intersecare P .



Se l'intersezione fosse in s , "abbastanza vicino" a q' (cioè s e q' sono adistanza così piccola da non permettere a P di avere meandri tra l'uno e l'altro), s e t avrebbero parità differenti di 1, essendo da parti opposte di P : la semiretta (gialla) parallela alla direzione di prescelta, con inizio in t avrebbe un incrocio in meno della semiretta (color arancio) con inizio in s .

Quindi la parità cambia se il cammino verde "di ripiego" incontra il punto s tra p e q' .

Il cammino verde deve incontrare $p-q$ tra q' e q , perché p , q e tutti i punti del cammino verde hanno la stessa parità.

A questo punto la dimostrazione del teorema di Jordan per il caso di un poligono P è completa. Si può ora identificare l'"esterno" di P con la classe A , classe dei punti con parità

0 (o pari) perché anche i punti di segmenti oltre il cerchio R hanno parità 0 o pari, non potendo incontrare il poligono P, che è contenuto in R.

In contrasto, B sarà definito come "interno" di P. Ci sono solo due parità, pari e dispari, e c'è poco da scegliere.

Si può così determinare se un punto è interno a P, semplicemente contando le intersezioni di una semiretta di assegnata direzione e verso con P. Se il poligono è molto complicato, il procedimento è stupefacentemente semplice. La seguente figura è da Courant e Robbins, p.367 lo dimostra.

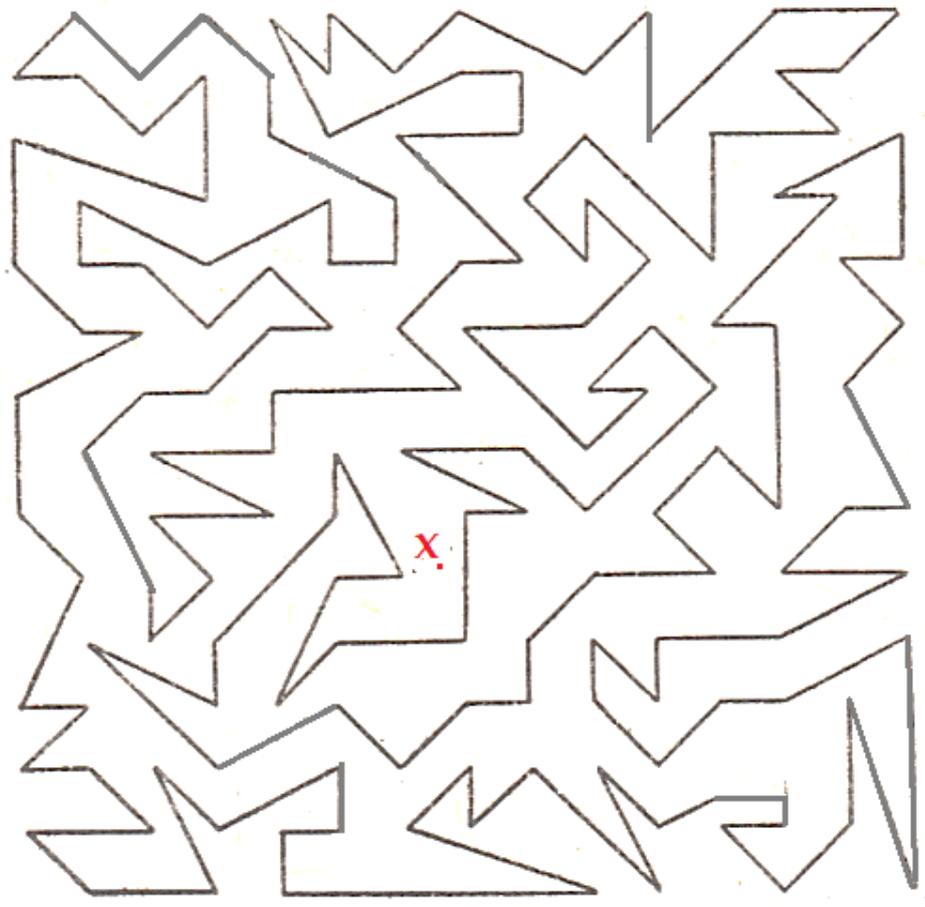


Fig.

Dire se X è dentro o fuori del poligono chiuso in figura può non essere semplice. Diventa banale se si applica la tecnica suggerita dal teorema di Jordan