L’OSCILLATORE ARMONICO E LE EQUAZIONI DI HAMILTON

II edizione

William Rowan Hamilton
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/15/William_Rowan_Hamilton_painting.jpg
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

Livello: III anno di Matematica o Fisica

Questo è un altro sassolino nella scarpa (a me capitò nel terzo anno di Fisica).

Se si vuole tracciare lo sviluppo della meccanica classica, vediamo che , sulle orme di Galileo ed altri, che lui modestamente (ma modesto non era) chiamava "giganti", **Newton (1642-1727)** scrisse le sue leggi, in particolare la seconda, che, pur nell'ignoranza di cosa fossero precisamente **F** ed m, bastò in pratica fino ai tempi di Lagrange.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Lagrange (1736-1813) era un altro genio, e non aveva bisogno di porsi lo scopo di rendere automatico lo scrivere le equazioni di Newton, ma lo fece. La sua ricetta era (apparentemente) semplice:

I. ***"Si trovi un sistema di coordinate tra loro indipendenti per il nostro sistema meccanico."*** Il problema del moto del sistema sarà risolto se si conoscerà l'evoluzione temporale di queste coordinate, che, inutile dirlo, furono dette coordinate lagrangiane e sono in genere indicate con q_i.

E' anche inutile dire che trovare queste coordinate, o "gradi di libertà del sistema" può non essere immediato, anche se sovente, con un po' di esercizio, diventano quasi intuitive. Per esempio, una particella che si muove su un cerchio di raggio R ha due coordinate x, y, che però non sono indipendenti, in quanto sono legate dalla relazione $x^2 + y^2 = R^2$. Qui, si vede subito che due coordinate legate da una relazione equivalgono a una sola coordinata indipendente, che in questo caso potrà essere identificata con l'angolo di rotazione. In particolare l'equazione è soddisfatta ponendo

$$x = R\ cos\vartheta, \ \ y = R\ sin\vartheta$$

Va aggiunto che, per il caso in cui si conoscano le relazioni fra coordinate cartesiane, come quella appena data, $x^2 + y^2 = R^2$, ma non si sappiano isolare le coordinate indipendenti, *Lagrange ideò una"prima forma" delle sue equazioni,* basata su un altro concetto da lui introdotto, detto dei *moltiplicatori di Lagrange*

Di rado questa forma viene utilizzata nei testi, ma ha un suo valore intrinseco. E' comunque un altro sassolino nella mia scarpa (da rivisitare a suo tempo).

II. ***"Si scrivano l'energia cinetica T e l'energia potenziale U in termini di queste coordinate indipendenti".*** Questa parte della ricetta è quasi automatica.

III. ***"Si scriva la funzione L = T-U".*** L sta per "Lagrange" e L è la famosa funzione Lagrangiana.

Un problema, riservato in pratica ai soli studenti italiani, almeno quelli della mia età, è che una forte scuola italiana propendeva per la definizione **F** = grad U, anziché **F** = **-** grad U, da cui risultava che la Lagrangiana era L = T+ U e l'energia totale, alquanto controintuitivamente, E = T –U. I due segni meno naturalmente si eliminavano e i risultati erano gli stessi, ma a prezzo di quante discussioni!

IV. ***"Allora le equazioni del moto saranno, una per coordinata indipendente, e tra loro indipendenti:***

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Questa è la "seconda forma" delle equazioni di Lagrange. Poi qualcuno potrà dire: ma guarda guarda, queste equazioni, che Lagrange derivò dalla meccanica razionale, quasi un'estensione del suo "principio dei lavori virtuali", che lui stesso aveva poso a base della statica, hanno la stessa forma delle equazioni di **Euler (1707-1783)**, fondamento del calcolo variazionale, usate per minimizzare certi "funzionali" (che sono numeri, non funzioni). Di lì nasceranno discussioni filosofiche a non finire a partire dalla domanda "Come fa una particella in moto a sapere in che direzione deve andare istante per istante, per minimizzare quel preciso funzionale *senza sapere quale futuro l'aspetta*?" Un cancello che questa volta rinunciamo ad aprire.

A questo punto si gira la manovella matematica, con tre possibili situazioni: o le equazioni di Euler-Lagrange risultanti si sanno risolvere tutte, o se ne sa risolvere solo qualcuna, o non si sapranno risolvere affatto. In ogni caso, però, anche solo saperle scrivere ci dirà qualcosa sul moto del sistema. Incidentalmente, anche le equazioni di Euler-Lagrange sono in diversi corsi e testi derivate un poco alla carlona (e sono un altro sassolino nella scarpa: la strada della meccanica classica è molto dolorosa).

A questo punto arriva **Hamilton (1805-1865)** (sto semplificando la storia). Ora è ben noto che Hamilton introdusse una serie di idee nuove in successione: la funzione Hamiltoniana, le equazioni di Hamilton, il principio di Hamilton, le trasformazioni canoniche, fino all'Equazione di Hamilton-Jacobi, che è in certo senso il punto di arrivo della meccanica classica. Ma, mentre gli sviluppi successivi delle idee di Hamilton nei corsi universitari sono approfonditi a piacere, sovente con svariati esempi, *le equazioni di Hamilton*, che secondo me sono state alla base dell'intero processo, vengono ricavate e menzionate solo come punto di passaggio obbligato. In certo senso sarebbero stati gli sviluppi futuri, a motivare Hamilton, e le equazioni non avrebbero in sè una grande importanza, ma sarebbero una sorta di impalcatura che poi viene tolta. Confesso che, sarò stato distratto, ma non ho mai visto esempi in cui si risolvessero le equazioni di Hamilton per un problema dinamico, neppure per il problema dell'oscillatore armonico che viene sempre dato come esempio non appena qualsiasi metodo di soluzione delle equazioni del moto, classico o quantistico, venga introdotto. Finisce che uno ha quasi l'impressione che il problema dell'oscillatore armonico sia l'unico problema solubile in meccanica classica e quantistica (fortuna che è una soluzione utile!). Ricordo solo un assistente del terzo anno di Fisica a Torino, che presentò una soluzione, ma ci confuse alquanto e ci assicurò che l'esercizio in questione non avrebbe costituito comunque materia di esame. Tanto meglio. Certamente la soluzione in Rete c'è, ma mi sono stancato di cercarla.

Incominciamo col ricavare le equazioni di Hamilton. Secondo me, dico secondo me, Hamilton sapeva bene che una equazione differenziale del secondo ordine può essere trasformata in un sistema di due equazioni del primo ordine, e, stufo di vedere equazioni che ricadevano sempre sull'equazione di Newton, che è del secondo ordine, cercò una via per trasformare un'equazione di Lagrange del secondo ordine in due "utili" equazioni del primo ordine. Sperava probabilmente che così facendo le cose si semplificassero. Oppure sperava che si potesse trovare una soluzione di almeno una delle due equazioni, che avrebbe permesso di ridurre l'ordine dell'equazione differenziale di partenza al primo.

Questo deve essere stato il punto di partenza.

Normalmente (e banalmente) l'equazione $y'' = f(x, y, y')$ può essere ridotta al sistema:

(1)
$$\begin{cases} y' = z \\ y'' = z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Ma, come vedremo, questo ad Hamilton non bastava. Probabilmente Hamilton per incominciare scelse un caso semplice in cui la Lagrangiana (a) dipendesse da una sola coordinata q; (b) *non dipendesse dal tempo.*

Dunque trascrisse **l'identità di Beltrami (Appendice I)**

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = costante$$

in termini meccanici: x diviene il tempo t, F diviene la Lagrangiana L, y diviene la coordinata lagrangiana q. L'identità è valida se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.

Per qualche motivo Hamilton scelse l'identificazione

$m\dot{q} = p$ invece di $\dot{q} = p$ (come sembrerebbe suggerire la posizione fatta più sopra).

Il motivo diviene accettabile quando si nota che L = T – U. Nella relativamente semplice meccanica che noi studiamo, il potenziale U normalmente dipende solo dalla posizione q e non dalle velocità. La derivata $\dot{q}$ compare soltanto nel termine di energia cinetica T, che nel caso più banale è della forma

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$$

Quindi, abbiamo che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

Ricordando che mv è il momento o quantità di moto, possiamo dire che $m\dot{q}$ è il momento generalizzato. Viene quindi comodo sceglierlo come seconda funzione indipendente nel nostro sistema di due equazioni lineari, invece dell'apparentemente più semplice $\dot{q}$, da cui del resto differisce solo per una costante. Nello sviluppo della fisica , la scelta si rivelò in seguito anche più felice.

L'identità di Beltrami diventa allora

$$p\dot{q} - L = H(p,q) = E \ \ (\text{costante} - \text{rispetto a cosa?} \ \ \text{ma al tempo, naturalmente!}).$$

Incidentalmente, senza scomodare il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, come si fa di solito, si vede che in questo caso

$$m\dot{q}^2 - L = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U = E$$

Ma T+U non è altro che l'energia, il che giustifica il nome E dato alla costante. La costanza di E nel tempo può essere riletta come "conservazione dell'energia" se, si noti bene, *la Lagrangiana non dipende direttamente dal tempo*. Questa innocua frase è come un altro cancello dietro al quale si apre un viale: il viale delle relazioni fra simmetrie di sistemi meccanici (uno dei quali, da un punto di vista classico, potrebbe essere addirittura l'intero universo), e certe quantità che vengono conservate. Lasciamo anche questo cancello chiuso, e tiriamo innanzi.

Calcoliamo ora il ***differenziale totale*** di $p\dot{q} - L = H(p,q;t)$, ***dimenticando*** il fatto che, quando in essa non compare t, H diviene una costante. Inoltre ricordiamo che H non dipende direttamente da $\dot{q}$, ma solo attraverso la p.

Abbiamo:

$$p\,d\dot{q} + \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial q}\,dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} \ = \frac{\partial H}{\partial q}\,dq + \frac{\partial H}{\partial p}\,dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

Dal primo membro, come già sapevamo, abbiamo che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$$

Inoltre (e queste sono le equazioni di Hamilton):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Si ottiene la seconda equazione trascrivendo le equazioni di Lagrange in termini di p e q:

se

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

cioè

$$\frac{d}{dt}p - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

allora, eguagliando nei due membri dell'equazione che abbiamo ricavato per il differenziale totale i coefficienti di *dq*:

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Ma le equazioni di Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

pur essendo due apparentemente innocue equazioni del primo ordine, in generale, prese insieme, sono più difficili da risolvere e sembrano anche meno interessanti di una unica equazione del secondo ordine. Tra l'altro, Hamilton avrebbe potuto procedere nel modo indicato in (1): scrivere prima l'equazione di Lagrange del secondo ordine per una variable, e poi trasformarla in due equazioni semplicemente ponendo la derivata prima come variabile indipendente. Preferì non seguire questo sistema e non credo che disse perché. Penso che volesse creare un sistema più generale e soprattutto più simmetrico. L'interesse del sistema viene proprio dal fatto che Hamilton non seguì la via diretta, che avrebbe comportato il tenersi la Lagrangiana.

Con tutto ciò sono pronto a scommettere che sono ben rari coloro che hanno già visto queste due equazioni risolte anche solo nel caso del'oscillatore armonico. E' dunque necessario dare ora la....

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

MEDIANTE LE EQUAZIONI DI HAMILTON.

Come è noto, la lagrangiana dell'oscillatore armonico è

$$L\,(x, \dot{x}\,;\, t) = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k\, x^2$$

Qui c'è l'annunciato mini-sassolino favorito dal fatto che la non trascurabile scuola italiana di meccanica definiva *F = grad U* e non *F* = - *grad U* come il resto del mondo. Alla fine, per non cadere in equivoco, mi dovevo sempre rifare alla legge di Newton, per cui la forza che agisce sul "punto materiale pesante" lo attrae verso l'origine, ed è quindi *F* = - *kx*, il che vuol dire che il potenziale per gli italiani è U = - $\frac{1}{2} k\, x^2$ e per gli altri $\frac{1}{2} k\, x^2$. Ad ogni modo, come si è detto, alla fine le equazioni del moto, sia Lagrangiane che Hamiltoniane, sono le stesse, come devono essere.

La nostra Hamiltioniana, ricordando che $p = \partial L / \partial \dot{x} = m\, \dot{x}$ e $U = \frac{1}{2} k\, x^2$

risulta quindi essere:

(2) $$H(x, p; t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k\, x^2$$

Non credo di aver fatto un trucco abbietto. Il sistema ha un solo grado di libertà, e la coordinata cartesiana x è anche la coordinata lagrangiana q. Nè la Lagrangiana né l'Hamiltoniana dipendono dal tempo. Potremmo quindi subito sfruttare il cosiddetto *integrale primo dell'Energia,* che non è altro che un modo snob di indicare la costanza dell'energia, che ci permetterebbe di portare il problema alle quadrature, usando la relazione:

$$\frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = E$$

Da cui:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$$

E a questo punto il matematico è soddisfatto, perché il problema è ridotto alle quadrature. Si troverà una soluzione che darà t in funzione di x ed andrà invertita. Buona fortuna. Ma è inutile continuare su questa strada che ci dà rapidamente la soluzione, e fa finire subito il divertimento, perché per noi la Hamiltoniana non è espressa in funzione di $\dot{x}$, ma di p, e la soluzione appena indicata per noi non vale, in quanto vogliamo trattare *x* e *p* entrambe come variabili indipendenti, allo stesso modo:

(3) $$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad \text{che porgono} \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -kx \end{cases}$$

E qui l’insegnante (o il testo) di solito bara e liquida il problema osservando che la prima equazione non fa altro che ridarci la definizione di *p*, e la seconda, sostituendo la *p* ricavata dalla prima equazione, non fa altro che restituirci l’equazione, non dico di Lagrange, ma addirittura quella di Newton.

L’impressione che io ne ebbi la prima volta che seppi di questo procedimento, usato quasi ovunque, fu negativa. Mi chiesi cioè (ero giovane, allora) se Hamilton fosse un imbecille. Ma come, tutto questo sforzo per tornare alle origini? Non dico a Lagrange, ma addirittura a Newton? In effetti, questa considerazione fu per me come un doloroso sassolino in una scarpa.

Ma neanche per idea, questa scappatoia non vale, noi giocheremo il gioco fino in fondo. E ci divertiremo anche. Abbiamo davanti a noi il problema generico di risolvere un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, in questo caso lineari e a coefficienti costanti, cioè (mutatis mutandis) il sistema

(4) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\,x + b\,y \\ \dfrac{dy}{dt} = c\,x + d\,y \end{cases}$$

Le variabili sono per noi: **x -> q; y -> p**
E le costanti sono per noi come segue**: a = 0, b = 1/m, c = -k, d = 0**

Il determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{vmatrix}$$

vale k/m (che in meccanica viene in genere battezzato ω^2).
Come si è detto, il problema è che la soluzione di questo sistema, anche per un caso così semplice come quello dell’oscillatore armonico, è “assai” più complicato della soluzione della cara vecchia equazione di Newton (la quale, peraltro, veniva anch’essa normalmente risolta barando: vedi in questo sito http://dainoequinoziale.it/sassolini/2017/01/05/leprimequazioni.html). Abbiamo tuttavia qualche freccia nel nostro arco.

Anzitutto, Internet ha dei siti che ci danno direttamente la soluzione. Mi riferisco in particolare al sito http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/sysode/sode0101.pdf, che, per il nostro caso (chiamato nel sito caso 1.2) , dà la soluzione:

$$x = be^{\sigma t}\left[C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)\right],$$
$$y = e^{\sigma t}\left\{[(\sigma - a)C_1 - \beta C_2]\sin(\beta t) + [\beta C_1 + (\sigma - a)C_2 \cos(\beta t)\right],$$

In cui C1 e C2 sono due costanti arbitrarie, e fin qui tutto bene. Come si vede dal sistema (3) e successive identificazioni, a =0 e b = 1/m. Inoltre σ è la parte reale degli autovalori della matrice dei coefficienti, che qui vale 0, in quanto l'equazione caratteristica della matrice dei coefficienti, identificati come indicato, è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{da cui } \lambda = \pm i\omega$$

Inoltre, β è la parte immaginaria, che per noi vale ω.

Le due equazioni divengono quindi:

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{m}\left(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right) \\ p = \omega\,(-C_2 \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t)) \end{cases}$$

(nella seconda equazione, il volonteroso lettore noterà che ho dovuto correggere un errore di stampa: secondo me manca una parentesi quadra tra C_2 e $\cos(\omega t)$).

Sfortunatamente, pur non avendo risolto l'apparentemente semplice sistema, la pura e semplice identificazione del caso di interesse tra le otto soluzioni (che non ho riportato) date dal sito Internet indicato, e l'identificazione delle costanti ivi indicate si è rivelata un compito già in se stesso non immediato, il che lascia presagire che la soluzione sia effettivamente piuttosto complicata, e tale da spaventare qualsiasi insegnante, che dovrebbe fare un corso di un paio d'ore sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, per permettere di risolvere il più semplice esempio della meccanica razionale.

Vorrei solo brevemente indicare nelle grandi linee un modo di procedere, dedicato a matematici "ciclisti", che devono essere curiosi per forza, se sono arrivati fin qui.

La questione si semplifica, per così dire, se si conosce un poco di calcolo matriciale.

In questo caso, il nostro sistema (1) può essere scritto

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\,\boldsymbol{x}$$

Dove **x** è il vettore $\binom{x}{y}$, che avrà un suo vettore contenente le condizioni iniziali a t = 0, che chiameremo $\mathbf{x}_0 = \binom{x_0}{y_0}$.

Inoltre, come abbiamo visto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

matrice a coefficienti costanti. Potremmo allora euristicamente pensare (ma lo si può pure dimostrare) che

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}\, e^{At}$$

Tutto sta nel dare un significato ad e^{At}. Innanzitutto, ci dobbiamo aspettare che sia una matrice anch'essa, perché noi possiamo pensare che questa strana espressione sia sviluppabile (con qualche cautela) in serie come un qualunque esponenziale di un numero qualsiasi (che in fondo altro non è se non una matrice 1 x 1). Ma una serie di matrici è una somma di potenze di matrici moltiplicate per opportuni coefficienti. È quindi una somma di matrici, una matrice essa stessa. Questa via può essere seguita introducendo altri concetti per semplificare il calcolo e porterebbe alla soluzione: strada lunga che non occorre seguire per i modesti scopi che mi propongo. Seguiamo la via più semplice e diamo noi la nostra dimostrazione, vale a dire, facciamo l'ipotesi che, come per il caso dell'equazione del primo ordine

$$x' = ax$$

abbiamo

$$x(t) = C\, e^{at}$$

così nel nostro caso possa essere

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0\, e^{\boldsymbol{\lambda} t}$$

In cui $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x_0}$ sono vettori a due componenti e λ una costante.

La nostra equazione di partenza, con questa sostituzione, diviene (facendo la solita derivata con λ costante):

$$\lambda \boldsymbol{x}_0\, e^{\boldsymbol{\lambda} t} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 e^{\boldsymbol{\lambda} t}$$

Ma $\lambda \boldsymbol{x}_0$ può essere altrettanto bene scritta come $\lambda I\, \boldsymbol{x}_0$ dove I è la matrice identità., come si può subito verificare. Abbiamo allora, eliminando i mai nulli esponenziali (anche quando sono immaginari, i risultanti seni e coseni non sono mai nulli simultaneamente), ed identificando le componenti dei vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x_0}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ -k & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = 0$$

E questa è la classica *equazione caratteristica* della matrice A, con due autovalori λ e due autovettori x_{01} e x_{02}. . Ponendo $\frac{k}{m} = \omega^2$, i due autovalori sono le soluzioni dell'equazione:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{da cui } \lambda = \pm i\omega$$

Scegliendo autovalori e autovettori corrispondenti, evidentemente il problema è risolto, in quanto la soluzione generale sarà data da una combinazione lineare dei due autovettori trovati, cioè:

$$\boldsymbol{x}(t) = a\, \mathbf{x_{01}} e^{i\lambda_1 t} + b\, \mathbf{x_{02}} e^{i\lambda_2 t}$$

In cui a e b sono due costanti che andranno particolarizzate in base alle condizioni iniziali.

Dunque restano da calcolare gli autovettori che competono agli autovalori trovati:

1) Autovalore +iω

Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\begin{pmatrix} -i\omega & 1/m \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando la prima riga della matrice per il vettore colonna, abbiamo una prima equazione:

$$-i\omega v_{11} + \frac{1}{m} v_{12} = 0$$

Usando la seconda riga abbiamo la stessa equazione (moltiplicata per $-i\omega$). In altre parole, una delle due componenti, per esempio v_{12} , può essere fissata arbitrariamente, poniamo a, e la prima componente diventa $-ia/(m\omega)$. Il primo autovettore risulta così essere:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ia/m\omega \\ a \end{pmatrix}$$

2) autovalore -iω

$$\begin{pmatrix} +i\omega & 1/m \\ -\omega^2 & +i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando la stessa procedura abbiamo invece:

$$\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +ib/m\omega \\ b \end{pmatrix}$$

Con le due costanti arbitrarie *a* e *b*.

La soluzione generale sarà:

$$q(t) = \frac{i}{m\omega} \left(-ae^{i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}\right)$$

$$p(t) = a\; e^{i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}$$

Ora, se si sceglie il caso particolare q(0) = 0, $\dot{q}$ (0) = 1 (*che corrisponde a p(0) = m)*

Abbiamo dalla prima equazione *a* = *b*, che porge, ricordando che i = 1/(-i)

$$q(t) = \frac{i}{m\omega} \left(-ae^{i\omega t} + a\, e^{-i\omega t}\right) = \frac{2a}{m\omega} sin\,(\omega t)\,)$$

E. dalla seconda equazione *a + b = 2 a = p(0) = m*

Cioè

$$q(t) = \frac{i}{m\omega} \left(-ae^{i\omega t} + ae^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{\omega} sin\,(\omega t)\,)$$
$$p(t) = m \cos(\omega t)$$

da paragonarsi con la soluzione che si ottiene direttamente dall'equazione del secondo ordine di Newton:

$$q(t) = c\cos(\omega t) + \ d \sin(\omega t)$$

Scegliendo il caso particolare q(0) = 0, $\dot{q}$ (0) = 1

Abbiamo c = 0 , d = +1/ω

Cioè

$$q(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

Con questo, abbiamo non dico risolto, ma almeno illustrato la difficoltà della soluzione del problema dell'oscillatore armonico col metodo delle equazioni di Hamilton.

(*Una breve derivazione delle funzioni trigonometriche da esponenziali immaginari è data in Appendice II*)

Naturalmente, si può calcolare la soluzione generale in termini dei valori iniziali di p e q, scoprendo che miracolosamente tutti i termini divengono reali.

Anzitutto, introduciamo i termini p_0 *e* q_0, valori iniziali delle due variabili indipendenti e si risolva per A e B il (semplice) sistema:

$$q_0 = -\frac{i}{m\omega}\ (a - b)$$

$$p_0 = a\ + b$$

Ottenendo:

$$a = \frac{1}{2}\ (p_0 + i\ m\omega\ q_0)$$

$$b = \frac{1}{2}\ (p_0 - \ i\ m\omega\ q_0)$$

Sostituendo ora nelle soluzioni generali già date

$$q(t) = \frac{i}{m\omega}\ (-a e^{i\omega t} + b\ e^{-i\omega t})$$

$$p(t) = a\ \ e^{i\omega t}\ + b\ e^{-i\omega t}$$

i valori trovati di A e B , nonché i valori dell(e) form ul(e) di Eulero (vedi Appendice II)

$$e^{ix} = \cos x + i\ sinx$$

$$e^{-ix} = \cos x - \ i\ sinx$$

si trova la soluzione generale cercata:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0 \sin(\omega t)}{m\omega}$$

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t)$$

Qualche studioso più attento noterà invece che a e b, per p_0 e q_0 reali, sono una la complessa coniugata dell'altra, e quindi, focalzzandoci ad esempio su p(t), avremo:

$$p(t) = Re(a\ e^{i\omega t})$$

E qui bisogna star attenti a non cadere nella trappola di credere che *Re(u v) = Re(u)Re(v)* bensì, posto *u = r + is*, v = *t + iz*, allora *Re(uv) = rt-sz,* quindi, ricorrendo ancora allo sviluppo degli esponenziali immaginari in somma di seni e coseni, possiamo scrivere immediatamente:

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t)$$

senza alcuno stupore che si tratti di un numero reale. Con qualche fatica in più si trova q(t).

Questa illustrazione, per quanto laboriosa, non è oziosa.

1) Innanzitutto, in un mondo dove tutti fanno o credono di poter fare quello che vogliono, ci mostra che la matematica non ci tradisce. Non solo, ma il fatto che p/q nel caso semplicissimo da noi risolto prima di dare la soluzione generale, comporti una certa $\omega = \sqrt{(k/m)}$, ottenuta dalla soluzione dell'equazione caratteristica di una certa matrice 2 x 2 non può non lasciarci piacevolmente sorpresi. Infatti la stessa ω salta fuori facendo la derivata temporale di q, cosa di cui in questa soluzione non abbiamo neppure parlato. In altre parole noi non abbiamo mai menzionato alcuna relazione fra p e la derivata temporale di q.

2) La seconda osservazione è l'arbitrarietà della scelta delle componenti del vettore **v. Noi abbiamo messo q come prima componente e p come seconda componente, ma è stato un arbitrio** perpetrato per far tornare i conti, che probabilmente qualcuno avrà notato.

Supponiamo di considerare la (3) e di definire

$$P = \frac{p}{\sqrt{m}} \quad \text{e} \quad Q = q\sqrt{k}$$

Avremmo allora una nuova Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$

Da cui risulterebbero le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

Già, ma che cosa distingue le P dalle Q? Perché non potremmo scambiare nella nostra mente il significato di P e Q e dichiarare che:

$$\begin{cases} \dot{Q} = -\dfrac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} = \dfrac{\partial H}{\partial Q} \end{cases}$$

Forse di qui nacque in Hamilton l'idea che le p e le q formino uno spazio con un numero doppio di variabili, trattate o trattabili esattamente allo stesso modo: questo è **lo spazio delle fasi,** che ha ampie applicazioni in meccanica statistica.

Si può far osservare che le equazioni di Hamilton non trattano allo stesso modo le p e le q. Io penso invece che il segno negativo sia irrilevante e questa possibilità di scegliere la prima o la seconda componente come q , e la p di conseguenza, stia alla radice di un altro concetto, introdotto da Hamilton stesso, quello delle **"trasformazioni canoniche",** che fanno passare da certe (p,q) legate dalle due equazioni di Hamilton con hamiltoniana H, a certe altre (P, Q) le quali sono legate da equazioni della stessa forma, mediante una nuova hamiltoniana K. Tra l'altro, è ovvio che se le nuove (P, Q) sono le vecchie scambiate (q,p), a parte un segno, la trasformazione è canonica, in quanto le nuove equazioni di Hamilton dipendono da una hamiltoniana K = -H .

Il culmine della meccanica analitica sarà trovare una trasformazione canonica che faccia passare da certe (p(t), q(t)) a delle nuove (P, Q) costanti. Sembrerà incredibile, ma questo è possibile. E naturalmente, si potranno interpretare queste costanti come i valori iniziali delle vecchie variabili. In altre parole, questa trasformazione canonica, che si trova per mezzo dell'equazione di **Hamilton-Jacobi,** ci darà l'evoluzione del sistema, poiché, e questo lo si può dimostrare, anche il moto del sistema può essere visto come una trasformazione canonica.

E con questo posso concludere, sperando di aver dato l'idea, togliendomi un sassolino dalla scarpa, di quello che è una sorta di parco incantato, dalla porta socchiusa, perché riservato ormai a pochissimi, coloro che studiano la meccaniza superiore.

Eugenio Beltrami, 1835-1895
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2d/Beltrami.jpg

Si sa che esistono, e non è raro incontrarli, tre casi in cui la soluzione delle Equazioni di Euler-Lagrange (EEL) viene facilitata, in quanto viene ridotta al prim'ordine.

1) Se y non compare in F, cioè $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

In questo caso

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Da cui

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = costante$$

2) Se y' non compare in F , allora $\frac{\partial F}{\partial y\prime}$ =0

da cui segue che $\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$

Si potrebbe osservare che in questo caso y non compare in F e non abbiamo più il problema. Ma non è vero. In altre parole, se y non è presente nella F, certo $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, ma non viceversa (sassolino nella scarpa che qui se ne va). Semplicemente, y viene determinata in modo implicito o meno e non vi sono costanti arbitrarie.

Ad esempio, sia F(x, y, y') = xy + y^2. La EEL diviene:

x + 2y = 0, e la soluzione è y = x/2, senza costanti arbitrarie. Con la solita identificazione di t col tempo abbiamo un modo a velocità costante partendo dall'origine. Sempre moto è.

3) Terzo caso, in cui in F non compare x esplicitamente.

In questo caso calcoliamo anzitutto la derivata totale dF/dx,

$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''$ ove $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

Possiamo ancora scrivere (dalla regola di integrazione per parti)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right)$$

Ora portiamo l'ultimo termine a primo (anzi primissimo) membro e abbiamo:

$$\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = 0$$

perché, a secondo membro, il termine moltiplicato per y' non è altro che il primo membro della EEL, che è eguale a zero. Da cui ricaviamo che

$$\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) = costante, \qquad \text{o, se preferiamo,} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = costante.$$

In altre parole, F non è costante al variare di x, ma la combinazione $\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F$ lo è.

E' questa ***l'identità di Beltrami***. Applicata a problemi meccanici, la combinazione $\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F$ è destinata ad una fulgida carriera: essa diviene la famosa funzione Hamiltoniana.

APPENDICE II:

ESPONENZIALI IMMAGINARI E FUNZIONI TRIGONOMETRICHE.

FORMULA DI EULERO (una delle tante).

Uno strumento molto utile è lo sviluppo in serie di potenze, cioè la possibilità di approssimare una funzione con un polinomio di grado infinito. In pratica si vogliono trovare i coefficienti a, b, c, d, etc. dell'espressione:

$$f(x) = a + bx + \ cx^2 + dx^3 \ldots$$

che ci permettano di approssimare la funzione nei pressi del punto x = 0 (Serie di Maclaurin). Un poco più complicata tecnicamente, ma non concettualmente, è la serie di Taylor, che ci dà lo sviluppo di una funzione f(x) nei pressi del punto x_0 e quindi è una serie di potenze non più di x, ma di $(x - x_0)$. Si può anche pensare a sviluppi in serie non più di potenze, ma di famiglie di funzioni più complicate, quali le funzioni trigonometriche (serie di Fourier) o altre ancora.

La formula per la serie di potenze fa pensare che un polinomio di grado infinito in x debba divergere, perché, ad esempio, x^{100} sembra essere un numero formidabile. Lo è però solo per x> 1, perché per x< 1 vale praticamente zero. Avremo quindi regioni in cui la serie converge e altre in cui non converge, come nel caso della serie geometrica:

$$\frac{1}{1-x} = \ 1 + x + \ x^2 + x^3 \ldots. \qquad (Regione\ di\ convergenza\text{: } |x| < 1)$$

Possono però esistere serie che convergono per x che varia da -∞ a + ∞: qui sono i coefficienti sempre più piccoli, che dominano sulle potenze di x, per alto che sia il loro grado, e per grande che sia x.

Assumendo che tutte le condizioni siano soddisfatte, non è difficile trovare i coefficienti della serie di MacLaurin, intorno al punto x=0, se la nostra f(x) è infinitamente derivabile. Sia dunque:

$$f(x) = a + bx + \ cx^2 + dx^3 \ldots$$

Per prima cosa valutiamo la funzione nel punto x=0. Chiameremo questa funzione f(0), membro di sinistra. Ponendo x=0 nel membro di destra troveremo solo a, perché tutti gli altri termini vanno a zero essendo moltiplicati per x o per una sua potenza. Quindi:

f(0) = a

Ora facciamo la derivata prima, che chiameremo f'(x) e valuteremo nel punto x=0.

La derivata prima di entrambi i membri è:

$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3\ldots$

la quale, valutata nel punto 0 ci dà:

$f'(0) = b$

Ora facciamo la derivata seconda (cioè la derivata prima della relazione precedente).

$f''(x)= 2c + 2 \cdot 3\, d\, x + 4 \cdot 3\, e\, x^2$

la quale, valutata nel punto 0, ci dà $f''(0) = 2c$, cioè $c = (1/2)\, f''(0)$

la derivata terza, messa a zero, ci darà

$f'''(0) = 2 \cdot 3\, d$, cioè $d = \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) f'''(0)$

Il risultato generale evidentemente sarà come segue:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

Per i curiosi, si può indicare che la serie di Taylor può essere scritta direttamente da quella di Maclaurin, prendendo le funzioni e le derivate del membro di destra nel punto x_0 anziché 0 e sostituendo, sempre nel membro di destra, $(x- x_0)$ e le sue potenze ovunque vediamo x e le sue potenze.

Vediamo ora tre esempi utili ai nostri scopi:

1. La serie esponenziale è facile, perché tutte le derivate valgono e^x, e per x=0 valgono tutte 1.

Quindi:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

2 e 2. Se vogliamo sviluppare le serie per sinx e cosx possiamo farci una tabella:

f (x)	f(0)	f'(x)	f'(0)	f''(x)	f''(0)	f'''(x)	f'''(0)	$f^{iv}(x)$	$f^{iv}(0)$
sin x	0	cos x	1	-sin x	0	-cosx	-1	sinx	0
cos x	1	-sin x	0	-cos x	-1	sinx	0	cosx	1

Dopo di che la successione dei coefficienti ricomincia da capo.

Ne risulta:

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$$

$$cos\,x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\right)$$

A questo punto diviene facile ricavare l'importantissima formula (di Eulero):

$$e^{ix} = \cos x + i\,sinx$$

Occorre unicamente porre ix al posto di x nella serie esponenziale, e ricordare che $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$, dopodiché il ciclo si ripete. Il risultato è:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots, \qquad -\infty < x < \infty$$

Questa serie può essere riordinata separando i termini che contengono l'unità immaginaria da quelli che non la contengono:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$$

Da cui segue immediatamente la formula cercata, che gli Americani chiamano "la formula più bella della matematica". Forse aggiungono anche "di tutti i tempi". Mah!

Come immediate applicazioni, troviamo che

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\,sin\,2\pi = +1$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i\,sin\,\pi = -1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

E l'ancor più curioso risultato (tenetevi bene, è un poco come essere sull'Ottovolante):

$$i^i = e^{i\frac{\pi}{2}\,i} = e^{\frac{-\pi}{2}} = 0.20788 \dots$$

Cioè, un numero che apparentemente più immaginario non si può, risulta invece essere un numero reale, fortunatamente non dei più frequenti da incontrare.

Ma dalla formula di Eulero discende, mutando x in –x, e ricordando che *cos(-x) = cos(x), sin (-x) = -sin(x)*

$$e^{-ix} = \cos x - i\,sinx$$

Ora si possono sommare e sottrarre le due equazioni per e^{ix} e e^{-ix}, ottenendo:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Che era il nostro obiettivo finale.