UNO SGUARDO SULL'IPERURANO

PITAGORA (identificato nella "Scuola di Atene")
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3f/Sanzio_01_Pythagoras.jpg
Raphael [Public domain], via Wikimedia Commons

Un mio amico, scusandosi per la stupidità della domanda, mi ha chiesto: *Un numero è razionale per definizione se è esprimibile come* ***rapporto*** *di due interi (o di due numeri razionali, che è alla fine la stessa cosa. No? (Sì). Pigreco, essendo il rapporto fra due numeri che abbiamo sottomano in natura, la circonferenza di una ruota e il suo diametro, deve essere un numero razionale. Come fa a non esserlo?*

Non esistono in matematica domande stupide, ammesso che uno non le voglia andare a cercare col lanternino. Se sono domande che esternano un dubbio reale, la colpa sta o negli insegnanti, o nel problema , ma solo da ultimo nello studente.
Io non so quanti si siano posti la domanda del mio amico. Eppure questa ci apre uno spiraglio su un mondo nuovo, che, io penso, furono i Greci a scoprire (probabilmente ai tempi di Pitagora) e da allora appartiene alla nostra civiltà occidentale. In effetti, l'osservazione è corretta: nessuna misura di circonferenze che noi possiamo fare in natura può superare la precisione del *diametro di un atomo del materiale di cui è fatto il nostro cerchio*, circa un centimillionesimo di centimetro. Per cui, se anche prendessimo un cerchio di diametro di un metro, e poi volessimo fare il rapporto circonferenza raggio, otterremmo un valore di Pigreco di una decina di cifre,*un numero razionale.*

Che il Pigreco sia invece un numero irrazionale è un fatto che fu dimostrato nell'Ottocento, e non fu banale. Ci è stato probabilmente insegnato senza dimostrazione, ci crediamo, e facciamo bene a crederci. Tuttavia, per discutere la cosa un po' meglio, proporrei di guardare alla diagonale di un quadrato. Qui non dobbiamo occuparci della misura di una circonferenza, cosa non banale da farsi meccanicamente, e certo fuori dalla portata dei Greci di allora: occorreva un filo "flessibile ed inestensibile", cioè un'idealizzazione in più. Però, anche nel caso del quadrato, facendo il rapporto tra diagonale e lato del quadrato, troviamo un numero irrazionale, la radice quadrata di due. E' un numero irrazionale di "qualità" ([1]) inferiore del Pigreco, ma è pur sempre un numero irrazionale con infinite cifre, dato dal rapporto di due numeri, che in linea di principio possiamo misurare con un righello.... O no? Così facendo cadremmo nello stesso trabocchetto già incontrato, che la natura non ci permette di procedere oltre un certo valore, di precisione altissima, ma determinato, e tale che definisce un numero razionale, mentre i Greci sapevano che la radice quadrata di due non è e non può essere un numero razionale.

Già, potrebbe osservare qualcuno: ma allora si potrebbe almeno dire che la misura vale con l'errore di una frazione ignota di atomo del materiale. Facile a dirsi, col senno di poi. Allora i Greci avevano semmai tutte le ragioni per accettare una radice quadrata di due razionale . E poi, come distingueremmo i due numeri, l'approssimazione razionale e il valore ideale irrazionale?

Qui i Greci devono aver sentito di essersi affacciati alla finestra di due mondi diversi dal nostro (aritmentica e geometria), che infine erano lo stesso, ma pur sempre diverso dal nostro. E presero una decisione eroica: dovendo scegliere, credettero nella ragione, col paradossale risultato che questa li costrinse ad accettare un numero ...irrazionale, e rifiutarono la misura empirica.

Il rapporto tra diagonale e lato del quadrato era dunque la radice quadrata di due, che ha l'onore di essere il primo numero irrazionale della storia della matematica umana.

Ragionando numericamente, se la radice quadrata di due fosse un numero razionale, sarebbe esprimibile, per definizione, come rapporto di due numeri interi, ad esempio A/B. Se semplifichiamo il rapporto riducendolo alla forma a/b , in modo che non abbia fattori comuni, e poi eleviamo al quadrato dobbiamo quindi avere:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Cioè

$$a^2 = 2\ b^2$$

Cioè a^2 deve essere divisibile per 2. Ma il quadrato di un numero dispari (2n +1), essendo eguale a $4n^2 + 4n + 1$ non è divisibile per 2, mentre il quadrato di un numero pari (2n), essendo eguale a $4n^2$ non solo è divisibile per 2, ma è anche divisibile per quattro. Quindi, non solo a^2 è divisibile per 2, ma deve essere anche divisibile per 4. *Cioè a è divisibile per 2.* Ma $b^2 = \frac{a^2}{2}$, come si è detto, cioè è divisibile per 2, e quindi per 4, il che vuol dire che b è un numero pari, cioè anche b è divisibile per 2. Ora, eravamo partiti dall'ipotesi che a e b non avessero divisori comuni, mentre abbiamo appena concluso che essi hanno evidentemente divisore comune 2. Di qui l'assurdo. E' dunque sbagliata l'ipotesi fondamentale, che la radice di due sia data dal rapporto di due numeri interi.

Quindi il quadrato non è quello che crediamo. Se nel nostro quadrato, per esempio di lato1 misurato con "assoluta" precisione, il rapporto tra diagonale e lato, esso è per forza di cose un numero razionale. Questo tuttavia avviene perché la nostra misura della diagonale non è perfetta, ma è sempre affetta da un certo errore, e alla fine, esaurite le sorgenti umane di errore, *perché la natura ce lo vieta*. Noi non abbiamo a che fare con il Quadrato ideale , ma il mondo in cui viviamo non può darci nulla più di un'immagine imperfetta del Quadrato ideale, in cui per precise che facciamo le nostre misure, c'è sempre qualcosa in più o in meno di un numero razionale, nella misura della diagonale.

Però non si possono mai spingere le nostre misure a tanta precisione: sarebbe come voler entrare in quel mondo ideale che non è il nostro. Un numero irrazionale è come

una finestra che si apre su quel mondo, ma solo fino a un certo punto, dicendoci:"Stai attento, questo non è il tuo mondo".
Penso che i primi Greci che trattarono queste entità ideali, cerchi, triangoli, sfere eccetera – e numeri interi, siano stati sgomenti allo scoprire che, ad esempio, la diagonale di un quadrato di lato 1 sfuggiva necessariamente alle loro misure. Queste entità ideali, evidentemente, vivevano in un loro mondo perfetto, dove misure perfette erano verosimilmente possibili

Abbiamo quindi scoperto, o i Greci scoprirono, che il mondo in cui viviamo è solo un'approssimazione del mondo dell'aritmetica e della geometria, i cui vivono i numeri e forme perfette, in cui, ad esempio, la diagonale ed il lato di un quadrato sono misurabili con infinita precisione. Inoltre questi numeri e queste forme sono incorruttibili, sono eterni, sono in ogni luogo. E questo mondo, i Greci dovettero naturalmente concludere, non è un prodotto della nostra mente, perché non lo vogliamo, perché ci complica maledettamente le cose.

Penso che questo mondo irraggiungibile, ideale, perfetto, sia come l'obiettivo della matematica moderna, che, coi concetti di limite, di serie ed altri ha vi posto l'assedio. Ma penso anche che il concetto Platonico dell'Iperurano, l'idea che questo nostro mondo in cui viviamo non sia altro che una imperfetta realizzazione di un mondo perfetto, in cui esistono i numeri e delle forme geometriche ideali, che però altro non sarebbero che le realtà più umili e accessibili del mondo ideale, sia alla base di una parte assai cospicua del pensiero europeo, che diede al nostro mondo la possibilità di inesauribili ed ineguagliati sviluppi.

NOTE:

I numeri irrazionali (non esprimibili come rapporto di due numeri interi) si dividono essenzialmente in due categorie:
(i) I numeri irrazionali "algebrici", che sono soluzioni di equazioni algebriche di grado finito a coefficienti razioali (che, se ci si pensa un momento, è lo stesso che dire interi, in quanto i denominatori possono essere eliminati), del tipo di:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x^1 + a_0 = 0$$

ove le a_i sono numeri interi.

Se il numero x è *soluzione* dell’equazione di primo grado, cioè di

$$a_1x^1 + a_0 = 0$$

diciamo che il numero è razionale.

Se il numero x è soluzione di

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x^1 + a_0 = 0$$

per un qualsiasi n, e non è un numero razionale, diciamo che si tratta di un numero “(irrazionale) algebrico”.

(ii) Se invece il numero x non è soluzione di un’equazione algebrica, non importa quanto sia grande n, il numero è detto “(irrazionale) trascendente”. Pigreco appunto è un numero trascendente, mentre la radice quadrata di due è un numero algebrico.

I numeri algebrici costituiscono un insieme “numerabile” (cioè si possono contare), i numeri trascendenti no. Per questo ho assegnato ai primi una “qualità” inferiore rispetto ai secondi. D’altronde, se la qualità sia superiore o inferiore è solo questione di gusti.