LA SFERA

CON LE QUATTRO OPERAZIONI

(e qualche *excursus* più avanzato, contro la noia)

http://www.publicdomainpictures.net/pictures/60000/velka/party-soap-bubbles.jpg

Se avessi potuto pianificare quale sarà l'ultimo "sassolino" che mi toglierò dalle scarpe, esso non avrebbe potuto essere altro che il presente, che mira a spiegare nel modo più semplice, ma almeno intuitivamente esauriente, due formule, l'una arcinota, l'altra meno, che riguardano questo meraviglioso oggetto ideale, quale poteva uscire solo dalla mente greca. Chissà, forse furono proprio le bolle di sapone a ispirarlo.

Le due formule sono:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

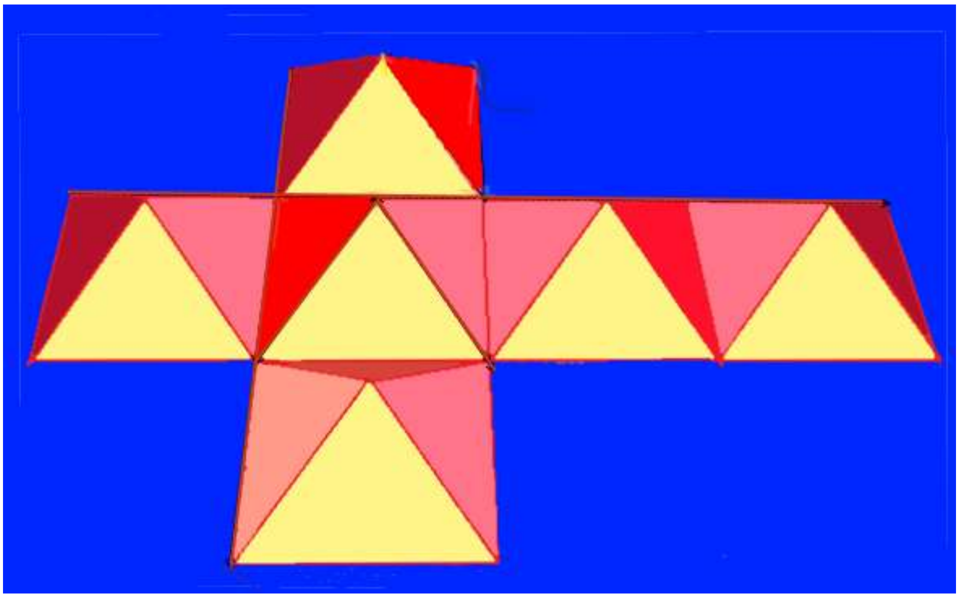
Delle quali, la prima (che per qualche motivo credo che tutti conoscano a memoria) dà il volume V di una sfera di raggio R, e la seconda (più semplice, ma, sono pronto a scommettere, assai meno nota) dà la superficie totale della medesima sfera.

Le due formule sono a rigore collegate, e nota una delle due e poco altro, si ricava l'altra. Inutile dire che il calcolo integrale permette di trovare rapidamente entrambi i risultati, anzi, può dare tanto la superficie quanto il volume di una sfera ...in 4, 5, 6, ...n dimensioni. Lo vedremo in appendice, ma questo richiede, appunto, qualche nozione di calcolo integrale.

Restiamo in tre dimensioni, e incominciamo col rendere intuitiva la relazione fra i due risultati.

Si prenda un cubo di lato L. Il suo volume è,come è noto L^3, il cubo del lato. Ma non c'è modo di estendere questa formula ad altri poliedri regolari. Per operare un'estensione, bisogna usare un metodo che, credo, risale ad Archimede.

Si prende il cubo e lo si scompone il sei piramidine identiche, ciascuna delle quali ha per base una faccia del cubo, e per altezza metà del lato. Dopo la scomposizione la situazione è come in figura.



Non occorre che lasciamo le piramidine connesse le une alle altre. Tuttavia con questo diagramma si vede come si possa ricomporre il cubo. Ora, il volume di una piramidina è dato da "area di base per altezza diviso tre". Se il lato è L , l'area della base è L^2 , l'altezza è L/2, e quindi abbiamo il nostro volume elementare v:

$$v = L^2 \left(\frac{L}{2}\right)\frac{1}{3} = \frac{L^3}{6}$$

Ma di piramidine ce ne sono sei, per cui il volume totale del cubo è:

$$V = L^3$$

Oh, la bella scoperta, che ha il fascino che prova chi si gratta l'orecchia sinistra con la mano destra! Ma, per complicarci ulteriormente la vita, dando il nome 1,2,3... alle piramidine, avremmo potuto scrivere che :

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6)$$

Qui le s_i sono le aree della base di ogni piramide, in questo caso tutte identiche e di valore L^2. La cosa funzionerebbe evidentemente anche se le aree fossero diverse, purché l'altezza sia costante e possa essere messa in evidenza. Scriviamo quindi

$$(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6) = S$$

Dove S è la superficie laterale totale del cubo.

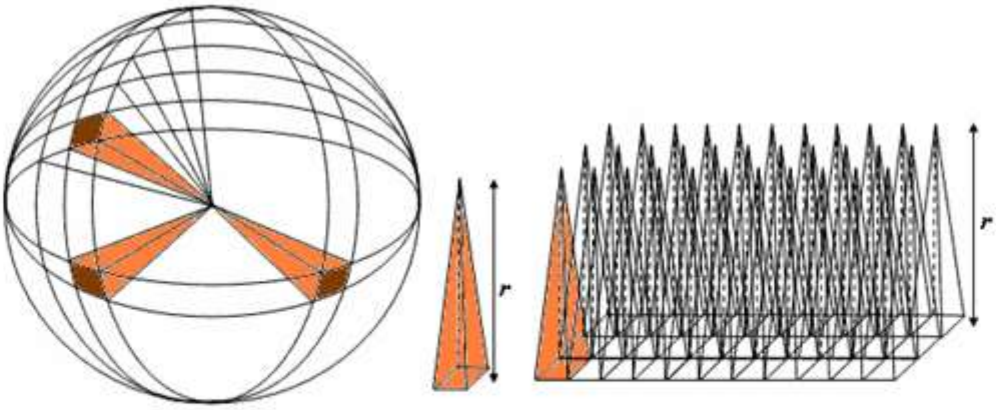
Il fatto che S valga 6 s è scomparso dalla nostra formula, il che è buon segno. Un relitto del cubo è il fatto che l'altezza vale L/2. Questo vale solo per il cubo. Scriviamo invece h, generico, per indicare l'altezza comune delle piramidi.

$$V = S\,h\,\frac{1}{3}$$

Vediamo che, da questa forma, risulta che purché la somma delle basi delle piramidine, di eguale altezza, valga S, non importa che le piramidine siano identiche. In fondo, questa formula vale tanto per la piramide quanto per il cono retto.

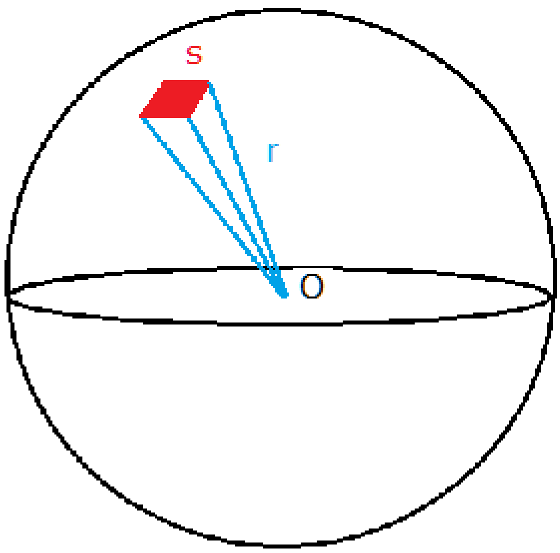
In altre parole, se riusciamo a scomporre il nostro poliedro in una quantità di piramidine della stessa altezza, il volume è il volume di una piramide che ha per base la superficie totale del poliedro e per altezza una opportuna h . Questa h è in genere la parte più lunga da calcolare a furia di teoremi di Pitagora. Per il cubo è banale. **Ma c'è un altro poliedro regolare per cui l'altezza h è intuitiva: è proprio la nostra sfera.**

Possiamo pensarla decomposta in piramidi assai piccole:



http://www.education.vic.gov.au/school/teachers/teachingresources/discipline/maths/continuum/Pages/volumesphere.aspx

O, mettendo a fuoco una delle piramidine:



Qualcuno può osservare che non si può scomporre una superficie sferica in piramidi a base quadrata, ma la cosa è irrilevante per vari motivi. Intanto noi ci aspettiamo di utilizzare piramidi di base piccolissima (ma tale che la somma totale delle basi sia l'area della superficie della sfera) e quindi la loro forma esatta non importa, purché l'altezza sia la stessa per tutte. Ed è intuitivo vedere che quanto più la base è piccola, tanto più l'altezza della piramide si avvicina al raggio della sfera (se si fa il calcolo per un cubo inscritto in una sfera, si vede che $h = R/\sqrt{2}$, cioè $h = 0.7$ R, abbastanza distante da R). In secondo, luogo, come ho detto, la base delle piramidi può avere qualsiasi forma, purché l’altezza sia la stessa per tutte, e la somma delle aree di tutte le basi sia eguale alla superficie totale della sfera.

Questo rende a parer mio intuitivo il fatto che anche per la sfera vale la relazione

$$V = S\,h\,\frac{1}{3}$$

Dove h è il raggiodella sfera. Quindi, data una sfera di raggio R, vale la relazione

$$V = S\,R\,\frac{1}{3}$$

Per cui, da V si ricava S e viceversa. Se, come tutti, ricordiamo che

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

da

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = S\,R\,\frac{1}{3}$$

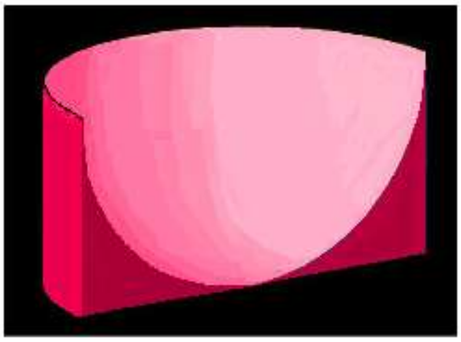
otteniamo che $S = 4\pi R^2$, il pregevole risultato che nessuno ricorda, ma che, come vediamo, è immediato ricordare dalla formula per il volume della sfera, che invece tutti ricordano. Ma chi lo sa calcolare?

Si tratta dunque di calcolare o S oV colle quattro operazioni.

I. CALCOLO DEL VOLUME.

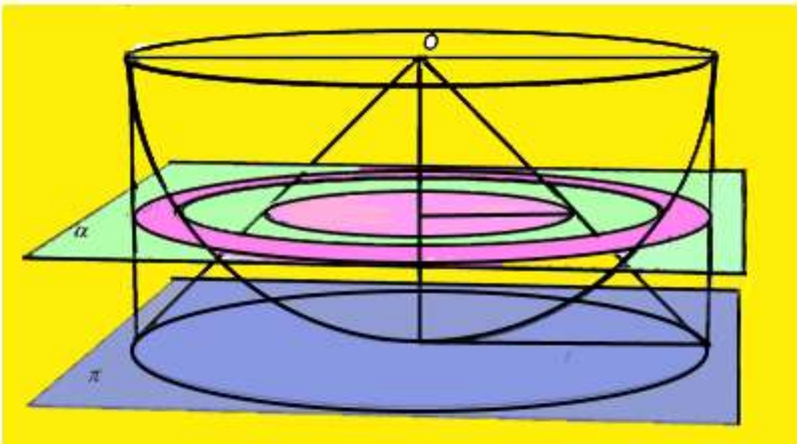
Il modo più semplice di calcolare V, dovuto - fino a un certo punto - a Galileo, richiede l’uso del teorema di Pitagora. Qualcuno può osservare che il teorema di Pitagora richiede l’estrazione di una radice quadrata, che non è propriamente una delle quattro operazioni, ma, come vedremo, non ce ne sarà bisogno.

Si asporti una semisfera di raggio R da un cilindro di altezza R. Si ottiene la cosiddetta “scodella di Galileo”, che qui disegno in spaccato.



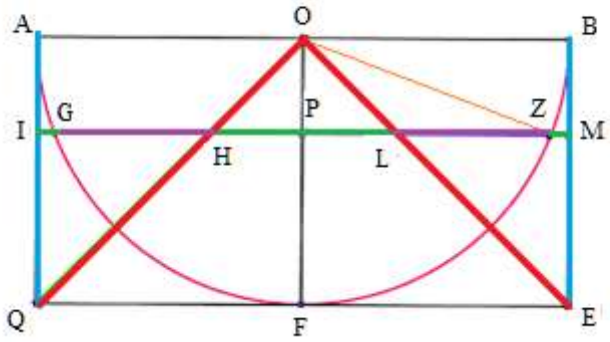
(mezza) scodella di Galileo

Galileo dimostrò che il cono con vertice nel centro e base corrispondente alla base del cilindro ha un volume eguale alla “scodella” (di Galileo) che, come si è visto, si ottiene togliendo al cilindro la semisfera.



E questo perché? Perché ogni fetta “ infinitamente” sottile di cono, parallela alla base (cioè sul piano verde) , ha un’area (cerchio rosa) eguale all’anello di “scodella” (anello rosa) che si trova alla stessa altezza. Questa è un’applicazione del principio di Cavalieri (1640) (vedi nota a questo capitolo).

Intanto è evidente che l’area alla base della scodella è la stessa che la base del cono (πR^2), e l’area all’altezza del vertice del cono è zero, per il cono essendo un punto, per la scodella un cerchio di spessore zero.



Si ponga ora l'origine in O, e si tracci un asse y discendente. Ci si focalizzi sul punto P all'altezza y, ove tracceremo la retta IM (viola e verde). Il triangolo OPL è isoscele, essendo simile al triangolo OFE. Quindi PL, il raggio del cerchio verde all'altezza y, sarà y, e la sua area sarà πy^2.
L'area dell'anello verde sarà la differenza delle aree di due cerchi, il primo dei quali, quello maggiore, ha valore πR^2, costante per ogni valore di y.
Tutta la difficoltà si riduce dunque al calcolo del raggio del secondo cerchio, interno.
Ma, applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPZ si vede che PZ = r non è altro che $r = \sqrt{(R^2 - y^2)}$, e l'area risultante è $\pi(R^2 - y^2)$.
L'area dell'anello verde sarà dunque

$$\pi R^2 - \pi(R^2 - y^2) = \pi y^2$$

Che non è altro che l'area del cerchio verde.
A quanto pare, Galileo si fermò qui, alla dimostrazione che le due aree sono eguali. Poi fece riferimento ad un testo dei suoi tempi in cui si asseriva che se le aree a tutte le altezze sono eguali, anche i volumi sono eguali, risultato intuitivo, basato sul "Principio di Cavalieri" (vedi nota).

I volumi del cilindro e della forma serpentina a fianco sono eguali, perché tutte le fette dei due solidi (le monete) a tutte le altezze hanno aree eguali.
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/72/Cavalieri%27s_Principle.png

In conclusione:

- Il volume del cono è eguale a 1/3 del volume del cilindro (che è $\pi R^2 \times R = \pi R^3$);
- Il volume della scodella è eguale al volume del cono, cioè (1/3) πR^3;
- il volume della semisfera è il volume del cilindro di altezza R ***meno*** il volume della scodella (che è eguale al volume del cono).

Quindi il volume della *semisfera* è (1-1/3) = 2/3 del volume del cilindro, quindi vale è (2/3)πR^3 . Il volume della ***sfera*** è il doppio di questi due terzi, cioè

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Che è la formula che volevamo dimostrare.

NOTA:

- PRINCIPIO DI CAVALIERI:

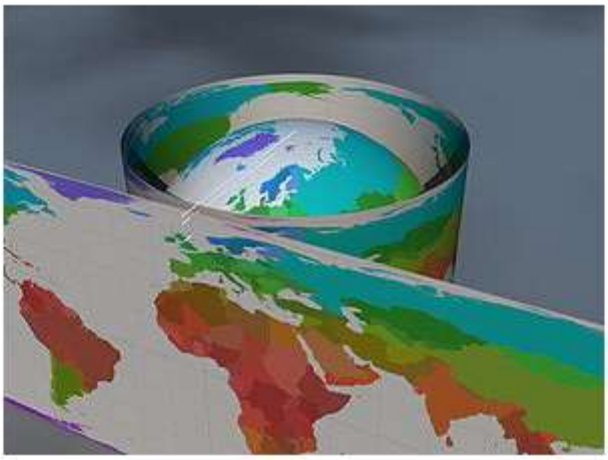
  "*Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.*"
  In particolare, se il rapporto è 1, i due volumi saranno eguali.

II. CALCOLO DIRETTO DELLA SUPERFICIE DELLA SFERA.

A questo scopo utilizzo un metodo suggerito dal lavoro dei cartografi nel corso dei secoli. Questi avevano lo scopo di riprodurre grandi zone della superficie terrestre cercando di ridurre al massimo le deformazioni risultanti dal fatto che la superficie della sfera non è sviluppabile su un piano. La dimostrazione di questa impossibilità fu data, presumo, da Gauss, come applicazione del suo "theorema egregium" o teorema egregio (chi vuole saperne di più può vedere, in questo sito, la conclusione del post:
http://dainoequinoziale.it/scienze/matematica/2016/11/25/geomnoneuclidee.html).

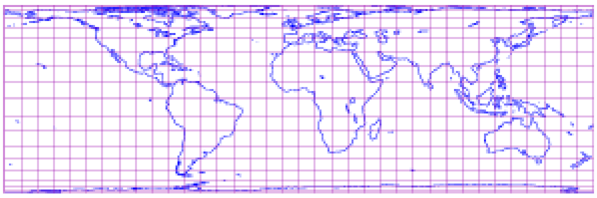
Alla fine, ad ogni modo, i cartografi dovettero rassegnarsi ad usare delle "proiezioni" che quanto meno deformassero al minimo la zona di loro interesse.

Una delle più semplici proiezioni fu quella di Lambert (1772), in cui la superficie sferica (di raggio R) viene proiettata “parallelamente” su di un cilindro di altezza 2R, tangente all’equatore.
Per noi un’equatore non esiste, perché sulla nostra sfera non ci sono disegni. A noi in realtà basta sapere come la proiezione viene eseguita e va bene che il cilindro sia tangente a qualsiasi cerchio massimo



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/96/Cilinderprojectie-constructie.jpg
By KoenB (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons

Risultato schematico:



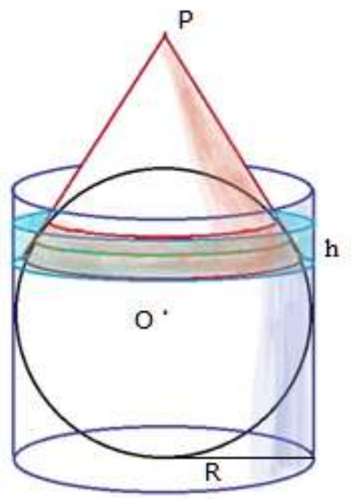
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7c/Equal-area_cylindrical_projection_of_world_with_grid.png

Vediamo che i due poli divengono due rette (entrambi gli enti geometrici, poli e rette, hanno area zero!) , i meridiani sono rette parallele , ed i paralleli sono sempre più vicini tra loro, per riflettere il fatto che nella realtà le aree delimitate da paralleli e meridiani vicino ai poli sono sempre più piccole, ciò che avviene nella realtà perché sono i meridiani ad avvicinarsi.

Dimostreremo poco oltre che la proiezione di Lambert è “equivalente” , nel senso che porzioni corrispondenti della sfera e del cilindro hanno aree eguali. Però vediamo subito che l’area del cilindro sviluppato è un rettangolo di lati $2\pi R$ e $2R$, la cui area è $4\pi R^2$. Ma se la proiezione di Lambert è equivalente, questo vuol dire che anche l'area della sfera vale $4\pi R^2$, il risultato cercato. Basta quindi dimostrare l'equivalenza della proiezione, ossia che zone corrispondenti della sfera e della proiezione hanno aree eguali.

Per ottenere questo risultato, possiamo approssimare la superficie della sfera con striscioline di tronchi di cono, e dimostrare che le striscioline di tronchi di cono hanno superficie equivalente alle striscioline di cilindro su cui sono proiettate.

Basterà farlo per una di esse, perché il ragionamento è lo stesso per tutte le striscioline.

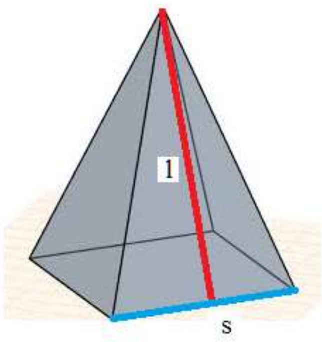


La strisciolina celeste sul cilindro, di altezza h, ha area $2\pi Rh$, che noi vogliamo dimostrare essere eguale all'area corrispondente sulla sfera. In realtà, ci accontenteremo di dimostrare che essa è eguale all'area compresa fra i due cerchi rossi tracciati sul cono, assumendo che questa sia poco differente dall'area tracciata dai due corrispondenti paralleli sulla sfera, *ciò che sarà sempre più vero quanto più stretta sarà la strisciolina (o quanto più vicini saranno i due paralleli).*

Per calcolare quest'area prenderemo come base il cerchio verde, tracciato a metà tra i due cerchi rossi. Il suo raggio sarà r, il raggio del cerchio rosso superiore sarà $r-\varepsilon$; il raggio del cerchio rosso inferiore sarà $r+\varepsilon$ (con ε piccolo); la distanza tracciata sulla superficie del cono tra il vertice P e il cerchio verde sarà l; quella tra P e il cerchio rosso superiore sarà $l-\delta$; quella tra P e il cerchio rosso inferiore sarà $l+\delta$ (con δ piccolo).

Vista da lontano, quest'area sul cono sembra inferiore a quella sul cilindro, ma non si dimentichi di notare che 2δ sul cono è maggiore di h sul cilindro, essendo inclinato rispetto ad h.

Ora ci occorre l'area della superficie laterale del cono. Utilizzeremo la solita analogia con una piramide a base quadrata.



Per questa piramide, la superficie laterale sarà data da quattro volte la superficie di una faccia, che a sua volta è data da *s l/2*. Moltiplicando per 4 otterremo che

$$S = 4\, s \frac{l}{2} = 2sl$$

Ma 2s è il semiperimetro della base, p/2, e quindi potremmo dire che

$$S = \frac{p}{2} l$$

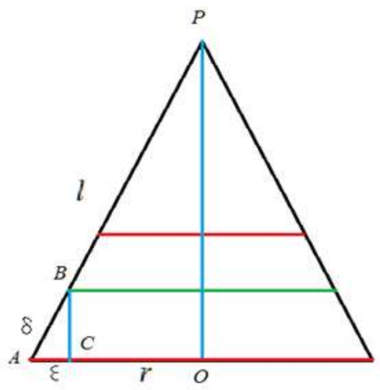
Nel caso del cono, p è la circonferenza, e p/2 vale πR, ove R è il raggio del cerchio di base, *l* è la distanza da un punto della circonferenza al vertice del cono. Ne viene che la superficie laterale del cono è

$$S = \pi R l$$

Quindi, la superficie laterale del *tronco* di cono, che è la differenza fra l'area del cono che si arresta alla base *inferiore* e quello che si arresta alla base *superiore* è

$$\Delta = \pi\,[(r + \varepsilon)(l + \delta) - (r - \varepsilon)(l - \delta)] = \pi[2r\delta + 2l\varepsilon]$$

Il primo passo da fare ora è compattare la formula trovata. Per questo, si osservi lo spaccato del cono nella seguente figura:



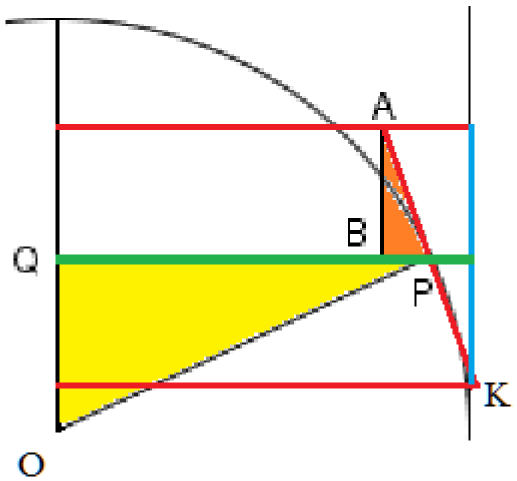
I triangoli ABC e APO sono simili, per cui:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{r}{l}$$

$$r\delta = l\varepsilon$$

E quindi $\Delta = \pi[2r\delta + 2l\varepsilon] = 4\pi r\delta = 4\pi l\varepsilon$

Ancora un passo da fare, osservando lo spaccato di sfera, cono (qui ridotto al tratto AK) e cilindro (qui ridotto al segmento azzurro verticale passante per K)



I due triangoli ABP e PQO sono simili, perché l'angolo in A (triangolo arancione) è complementare all'angolo in P (arancione), e l'angolo in P (giallo) è complementare allo stesso angolo in P (arancione), in quanto il raggio OP forma un angolo retto con la tangente in P. L'angolo in P (giallo) è quindi eguale all'angolo in A (arancione) e gli altri due angoli sono eguali, pperché abbiamo a che fare con triangoli rettanngoli. Abbiamo quindi:

$$\frac{BA}{AP} = \frac{QP}{PO}$$

Ma PO = R, raggio della sfera, BA è metà dell'altezza della striscia di cilindro corrispondente alla striscia di tronco di cono, che chiamiamo h/2, QP è il raggio r, AP è δ, per cui possiamo riscrivere la formula come:

$$\frac{½h}{\delta} = \frac{r}{R}$$

Da cui $½hR = r\delta$. Infine, lo spessore della striscia di tronco di cono è 2δ, che possiamo chiamare L. Abbiamo quindi $hR = 2\, r\delta = rL$, e infine **$2\pi hR = 2\pi rL$,** la formula dell'equivalenza desiderata.

Tiriamo un respirone, e scriviamo il classico

CDD (come dovevasi dimostrare)

Riassumendo:

1) abbiamo fatto la ragionevole ipotesi (giustificabile con metodi più avanzati) che una strisciolina di sfera compresa fra due paralleli abbia un'area che per striscie sempre più sottili tende al valore dell'area di un tronco di cono che ha i due paralleli come confini;

2) abbiamo dimostrato che l'area di questa strisciolina di tronco di cono è eguale all'area della strisciolina di cilindro su cui essa viene proiettata nella proiezione di Lambert;

3) abbiamo considerato che se ciò vale per una strisciolina di sfera, vale per tutte le striscioline di sfera;

4) e ne abbiamo concluso che la superficie della sfera è eguale alla superficie del cilindro tangente ad un cerchio massimo, cioè un rettangolo di lati $2\pi R$ e $2R$, la cui area è $4\pi R^2$. Quindi:

Superficie di una sfera di raggio R = $4\pi R^2$

APPENDICE I ALLA SFERA

SUPERFICIE E VOLUME DI UNA SFERA IN n DIMENSIONI.

Prerequisiti:

- **La sfera in geometria analitica**
- **Un poco di calcolo integrale (in particolare l'integrazione della funzione gaussiana)**
- **Un'idea della funzione Γ di Euler (per la quale si veda tuttavia l'appendice II).**

Non sono molti i campi dell'indagine umana in cui si possono fare calcoli concreti ed ottenere risultati rigorosi che riguardano oggetti che nessuno può vedere e solo pochissimi o nessuno del tutto possono immaginare.

Naturalmente, la matematica è uno di questi campi. Ad esempio, noi possiamo calcolare il volume e la superficie di una sfera in quattro dimensioni, anche se è difficile dare anche solo una vaga idea di quello che possa essere uno di questi oggetti. Sono creazioni della nostra mente o esistono davvero? Questo è l'eterno problema della matematica, che però questa volta lasceremo da parte.

Una vaga idea di un sfera in quattro dimensioni la si può dare per analogia, pensando a come esseri bidimensionali (piani e viventi su un piano) possano avere un'idea di una sfera in tre dimensioni. Questo è anche il soggetto principale di un libro scritto da un eccentrico inglese dell'Ottocento, certo E. A. Abbott, dal titolo Flatland (1884), in italiano Flatlandia.

Flatland è un paese bidimensionale (nella mia figura 1 rappresentato dal piano azzurro).   Uno dei suoi abitanti, il Narratore, bidimensionale, riceve la visita di uno straniero, la Sfera, che viene dal mondo in tre dimensioni. Egli viene convertito dalla Sfera alla fede (in realtà eresia) nelle tre dimensioni e si farà missionario di questa fede. I risultati dei suoi sforzi sono rivelati nell'ultimo capitolo. Il romanzo è una satira matematico-teologica, carica di sottile umorismo e rivolta ad un lettore del tutto ordinario, purché versato in matematica e teologia. Per conto suo, se non sbaglio, l'autore cercò di educare sua figlia alla fede delle quattro dimensioni. Era un tipico eccentrico inglese, occasionalmente pericoloso.

Dunque la sfera 3d passa attraverso il mondo 2D del protagonista.

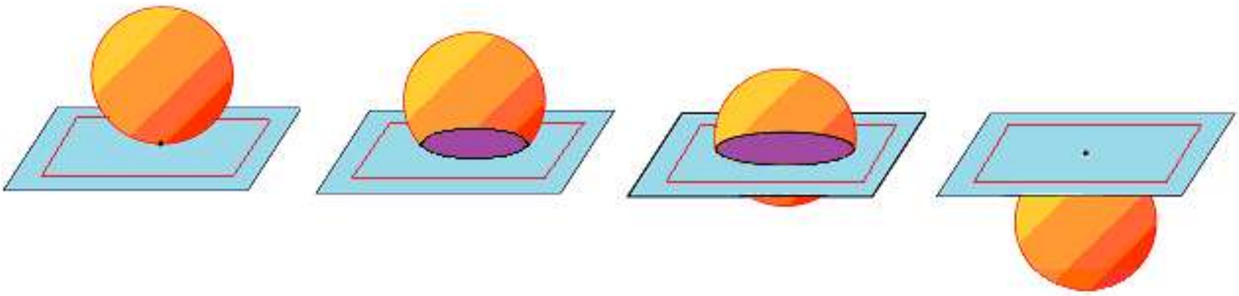


Fig.1

Il povero bidimensionale non vede la sfera tutta in un pezzo quando essa lo visita, ma ne vede solo la parte viola, che è per noi un *cerchio*, ma per il bidimensionale è quello che lui intende per *sfera*. La sua *sfera* è rappresentata dall'equazione (il bidimensionale conosce la geometria analitica del piano)

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$

(La *superficie* , cioè il contorno, della sua *sfera*, naturalmente, è rappresentata da:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

Che per noi è semplicemente una *circonferenza*).

In altre parole, per il bidimensionale, quando la sfera in 3D (per lui trisfera) visita il suo mondo (attraversa il piano) essa è una successione di *sfere come lui le concepisce* (cerchi per noi) ma di raggio variabile, da 0 a un certo massimo. Se il bidimensionale è un buon matematico può forse dirsi: "Nulla vieta che esistano entità matematiche per me invisibili, ma che contengono i punti di coordinate (x_1, x_2, x_3) con coordinata x_3 *che sfugge ai miei sensi*, i quali soddisfano l'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$$

Il bidimensionale potrebbe notare un'altra cosa: la sfera in 3D entra ed esce dal rettangolo rosso senza "sfondarne" i lati.

Lo stesso potremmo pensare noi se fossimo visitati da una quadrisfera. Nel nostro mondo tridimensionale vedremmo una serie da trisfere di raggio variabile, che verosimilmente contengono tutti i punti di coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) con coordinata x_4 (della quale ultima non abbiamo alcuna sensazione), che soddisfano l'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2$$

E la cui superficie è data dai punti di coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) per i quali vale:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

E, ovviamente, nulla ci vieta di definire di questo passo volumi e sfere in n dimensioni, aggiungendo dei "puntini" di seguito al primo membro delle due formule.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2 \leq R^2$$

In base alla figura 2 vediamo anche come noi tridimensionali vedremmo una quadrisfera che ci viene a visitare: una successione di sfere di raggio crescente da un punto fino ad un massimo e poi decrescente di nuovo fino ad un punto, quando finisce la visita.

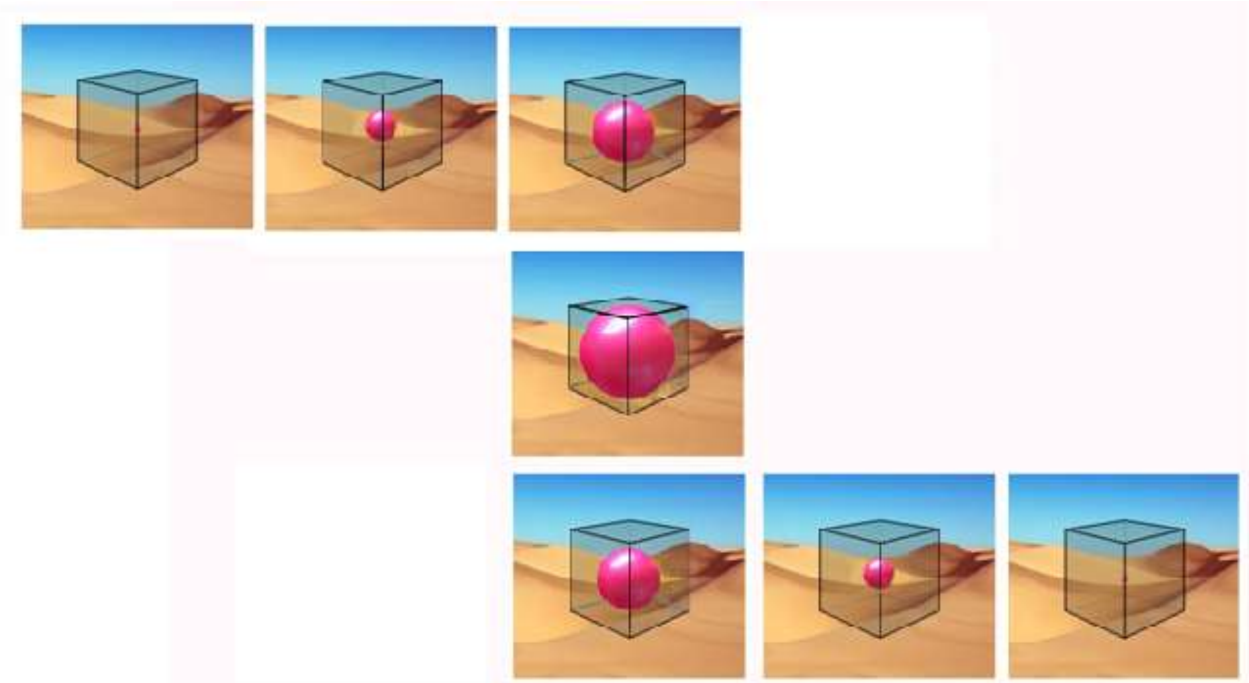


Fig. 2

Va anche qui notato che, supponendo che il cubo sia ermeticamente chiuso ed abbia pareti di vetro, può succedere che il proprietario del cubo ci trovi dentro una grossa sfera, come quella della figura centrale (la quarta), che sarebbe entrata senza rompere vetri. E dopo qualche tempo non la troverebbe più: di nuovo la sfera se ne sarebbe andata senza rompere vetri. Ne dovrebbe dedurre che vive in un mondo a quattro dimensioni e una quadrisfera è passata di lì. Meglio comunque una quadrisfera di un quadriladro, perché non avrebbe alcuna speranza di riprenderlo.

Non ci resta altro da fare che qualche integrale (seguirò in questo in gran parte il trattamento di http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/volume_11.pdf).

In coordinate cartesiane (rettangolari) il volume totale di una n-sfera di raggio R può essere scritto come:

$$\int \ldots \int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots x_n^2 \leq R^2} dx_1\, dx_2 dx_3 \ldots dx_n = C_n R^n$$

Ogni integrale dx_i , dal centro al contorno della sfera, produrrà infatti un fattore R moltiplicato per una costante, che vista la simmetria della sfera, dovrà esser identica per tutte le x_i. Non avremo quindi funzioni strane a secondo membro come risultato dell'integrazione, ma soltanto un monomio, costituito da un fattore che moltiplica R^n, un R per ciascun x_i.

Indicheremo con $S_{n-1}(R)$ la superficie della sfera ad n dimensioni.

Il volume della tri-sfera, dal calcolo integrale, una volta eseguite le integrazioni sugli angoli (il che produce un fattore 4π) può essere considerato come somma di tanti gusci sferici concentrici, una sorta di cipolla, ciascuno dei quali ha la superficie $4\pi r^2$, con r che va da 0 a R, e lo spessore dr (le sfere dovrebbero avere uno spessore "infinitamente piccolo").

Il volume della sfera tridimensionale potrebbe quindi essere scritto formalmente come:

$$V_3(R) = \int_0^R 4\pi r^2\, dr = \int_0^R S_2\,(r) dr$$

L'integrale è ovvio, e ci dà il solito volume della sfera, su cui è inutile insistere. Invece vediamo che è utile indicare con S_2 la superficie che contribuisce al volume V_3, perché tale superficie ha due dimensioni e non tre.

Un punto importante è che il fattore 4π proviene dall'integrazione sulla parte angolare dell'elemento di volume in coordinate radiali in 3 dimensioni, che è, come è noto:

$$dx_1 dx_2 dx_3 = dV_3 = dr\ (r d\theta)(r\, sin\theta\ d\varphi) = r^2 dr\ (sin\theta\ d\theta\ d\varphi) = r^2 dr\ d\Omega_2$$

Espressione nella quale abbiamo inserito la notazione $d\Omega_2$ per indicare la parte angolare in due dimensioni di dV.   Come è noto, l'integrale $\int d\Omega_2 = \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ = 4\pi$. (E con questo l'integrale è diventato noto, se non lo era, a qualsiasi lettore che conosca un poco di calcolo integrale).

Possiamo allora immaginare di scrivere:

$$V_n(R) = \int_0^R S_{n-1}\,(r) dr$$

Ma, dal teorema fondamentale del calcolo integrale (che mette in relazione integrale e derivata) si deduce:

$$S_{n-1}(R) = \frac{dV_n(R)}{dR} = n\ C_n R^{n-1}$$

E quindi tutto il problema si riduce al calcolo di C_n.

In analogia con quel che si è fatto per la sfera in tre dimensioni, possiamo scrivere

$$dx_1 dx_2 \dots dx_n = r^{n-1} dr\ d\Omega_{n-1}$$

Tutti i fattori angolari sono inclusi in $d\Omega_{n-1}$: come secondo esempio, per un cerchio bidimensionale $dV_2 = r^1$ dr $d\Omega_1$ dove $d\Omega_1 = d\theta$, e quindi $V_2 = \int_0^R r\ \ dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^R r\ dr = \ \pi R^2$.

Come si è visto, in una sfera, non importa di quante dimensioni, le variabili radiali sono una sola. Le altre n-1 variabili sono angolari.

I valori di $d\Omega_{n-1}$ possono essere laboriosamente calcolati. Tuttavia, per calcolare il volume di una sfera in un numero qualsiasi di dimensioni, l'integrale sulla parte angolare è separato da quello sulla parte radiale, proprio perché la sfera e sfericamente simmetrica.

$$n\ C_n r^{n-1} dr = r^{n-1} dr \int \dots \int d\Omega_{n-1}$$

Quindi:

$$\int \dots \int d\Omega_{n-1} = nC_n$$

Fortunatamente, non è necessario passare per l'espressione esplicita di $d\Omega_{n-1}$ per calcolare C_n. Si consideri la funzione (una gaussiana in n dimensioni):

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)}$$

Possiamo integrarla tanto in coordinate cartesiane rettangolari quanto in coordinate ipersferiche, in cui $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots x_n^2 = r^2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)} = \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r^{n-1}\, dr \int d\Omega_{n-1})$$

ove l'elemento di volume è stato messo fra parentesi.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, e^{-x_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, e^{-x_2^2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-x_n^2} = nC_n \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr$$

Tutti gli integrali compresi in questa espressione sono fattibili e noti, a coloro ai quali sono noti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$$

Il primo integrale viene eseguito con un trucco noto (si veda la Nota 1 a questo capitolo); il secondo, con un cambiamento di variabili ($x^2 = y$), produce la funzione Γ (Gamma) di Euler, per la quale – se non è già nota - si veda l'appendice II. Si tratta comunque di una funzione definita per mezzo di un integrale, e , a parte i casi di argomenti interi e seminteri, gli altri valori devono essere calcolati numericamente. Tuttavia, come vediamo, per calcolare superficie e volumi ci bastano le funzioni Gamma di numeri interi o seminteri, e farò vedere nella Nota 2 che queste sono calcolabili direttamente.

Abbiamo quindi:

$$\pi^{\frac{n}{2}} = C_n \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = C_n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

In cui si è sfruttata la proprietà fondamentale della funzione Γ, che $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.

In conclusione,

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$$

E finalmente:

$$\boldsymbol{V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}}$$

Da cui, facendo la derivata, segue la formula per la superficie:

$$S_{n-1}(R) = \frac{n\, \pi^{\frac{n}{2}} R^{n-1}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$$

che, usando all'inverso la

$$\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

si può anche scrivere:

$$\boldsymbol{S_{n-1}(R) = \frac{2\, \pi^{\frac{n}{2}} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$$

Il lettore fanatico potrà verificare la validità di queste due formule per i casi noti, n =2 ed n= 3, ricordando che S_1 non è altro che la circonferenza, e V_2 l'area del cerchio.

NOTE

1. Vorrei anzitutto notare che anche l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

che abbiamo incontrato nel calcolo del volume e della superficie di una sfera a n dimensioni è anch'esso riconducibile ad una funzione Gamma.

Anzitutto, si noti che la funzione da integrare, e^{-x^2}, è una funzione pari, nel senso che non cambia valore sostituendo x a –x. Per cui possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}$$

Ponendo $x^2 = y$, $x = \sqrt{y}$, $dx/dy = 1/(2\sqrt{y})$, il nostro integrale diventa:

$$2\int_{0}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = 2\,½\int_{0}^{+\infty} dy\, e^{-y} y^{-½} = \int_{0}^{+\infty} dy\, e^{-y} y^{½-1} = \Gamma(½)$$

Sfortunatamente, questo non ci aiuta molto nel senso di trovarne il valore, **$\sqrt{\pi}$,** e la formula viene piuttosto usata in senso inverso, perché l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}$ lo si sa fare, ad esempio col seguente trucco.

Si moltiplichi l'integrale per uno identico. Dato che la variabile su cui si integra può portare qualsiasi nome, si chiami il secondo integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}$. Con questo si integra una gaussiana bidimensionale sull'intero piano, e possiamo passare a coordinate polari, sfruttando il fatto che

$x^2 + y^2 = r^2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, e^{-(x^2+y^2)} = \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \int_{0}^{2\pi} d\theta$$

L'integrale angolare porge 2π; l'integrale radiale ammette un immediato cambio di variabile, $r^2=y$, $r\,dr= ½\,dy$. Ora $\int_{0}^{\infty} e^{-y}\, dy = 1$. Quindi il quadrato del nostro integrale di partenza è eguale a $½(2\pi)$, e di conseguenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} = \Gamma(½)$$

2. Calcolo delle Gamma di interesse al problema della sfera in n dimensioni.

Se i valori di n sono pari, tutte le Gamma di un numero intero sono fattoriali, e quindi non presentano problemi. Se i valori di n sono dispari esiste una formuletta, che non è difficile ricavare per ricorrenza, che ci dà $\Gamma(\frac{n}{2})$ sfruttando la relazione fondamentale $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$. La formula è:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

Dove n!! è il doppio fattoriale, che, per n pari vale n(n-2)(n-4)...4·2; e per n dispari vale n(n-2)(n-4)..3·1.

Ma , se n non è proibitivamente grande, è facile calcolare i valori successivi di $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.
In pratica il lettore vedrà subito come costruire la seguente tavola:

n	$\Gamma(\frac{n}{2})$	Formula	Result
2	Γ(1)	0!	1
3	Γ(3/2)	$\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
4	Γ(2)	1!	1
5	Γ(5/2)	$\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
6	Γ(3)	2!	2
7	Γ(7/2)	$\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
8	Γ(4)	3!	6
9	Γ(9/2)	$\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	$\frac{105\sqrt{\pi}}{16}$

Un fatto curioso è che, inserendo queste formule nelle formule che ci danno rispettivamente le V_n e le S_{n-1} non compariranno mai fattori $\sqrt{\pi}$. In tutte le dimensioni le formule che danno volume e superficie conterranno sempre soltanto potenze intere di π.

3. Commento sull'uso della funzione

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots x_n) = e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)}}$$

per arrivare ad un'espressione di C_n.

In effetti, la cosa può sembrare sospetta. Ma la C_n che cerchiamo dipende solo dall'elemento di volume in coordinate ipersferiche in n dimensioni, e a sua volta, l'uica parte difficoltosa di questo elemento è la parte angolare, che può essere tranquillamente separata dal resto dell'integrale, in quanto la $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ è sfericamente simmetrica. Nell'ultimo passaggio noi estraiamo la C_n dal risultato, eliminando così l'apporto della gaussiana.

APPENDICE II ALLA SFERA

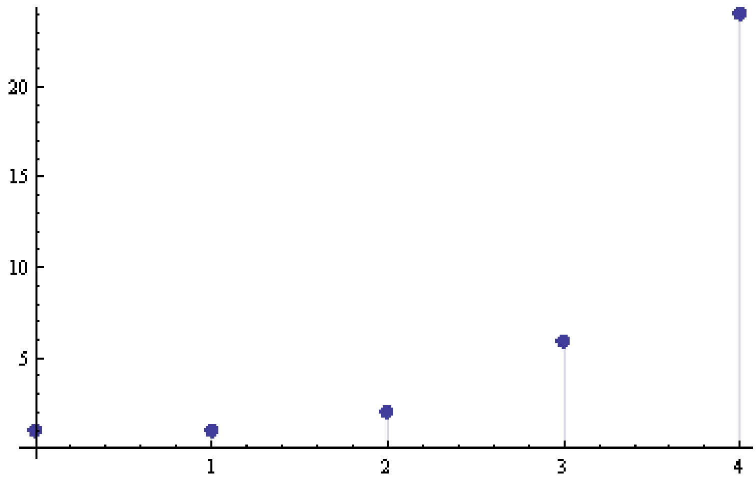
FATTORIALE E FUNZIONE GAMMA

(Nozioni elementari)

Come probabilmente è noto il fattoriale, scritto n!, indica il prodotto n· (n-1)·(n-2)…2·1.

Questa è la definizione più antica, e definisce la funzione fattoriale solo per i numeri interi positivi.

Il diagramma è quindi:



Come abbiamo già visto, la funzione può anche essere definita ricorsivamente come:

$$f(n) = n \cdot f(n-1)$$

Questo significa che per ottenere f(n) bisogna prendere il valore di f(n-1) e moltiplicarlo per n. Già, ma qual è il valore di f(n-1)? Una funzione definita ricorsivamente può essere calcolata soltanto se ci agganciamo da qualche parte. Logico è porre f(0) =1. La funzione f(n) non può essere nulla per alcun valore di n, altrimenti è nulla per tutte le n. Provare per credere. Tuttavia potremmo anche porre f(2)=2. Naturalmente f(3) =6 e via dicendo. E f(1) ? f(1) sarà eguale a f(2)/2, cioè 1. Ed f(0) sarà eguale a f(1)/1 = 1, in coerenza con quanto avevamo già detto. Questa funzione è, naturalmente , il fattoriale n! = n (n-1) (n-2) (n-3)..2 · 1.

Ma questa funzione ricorsiva ci rivela che qualcosa non funziona, o funziona troppo bene.

Per esempio, se 0! = 1, abbiamo 0! = 0 · (-1)! Cioè (-1)! = 1/0 = ∞.

Uno potrebbe pensare che ci si potrebbe fermare qui. Ma (-1)! = (-1) (-2)! E quindi (-2)! = ∞/(-1) = -∞. Continuando a procedere vedremmo che i fattoriali dei numeri interi negativi valgono alternativamente +∞ e -∞. Come strumento di calcolo non valgono molto, ma chiaramente tentano di dirci qualcosa.

Euler studiò un integrale interessante, che io scriverò in modo un po' diverso da come avrebbe preferito lui:

$$F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

Questo integrale, per x ≥ 0, può essere eseguito numericamente. Se x < 0, l'integrando diverge in zero, estremo inferiore, e abbiamo dei problemi. L'integrale è quindi definito solo per x ≥ 0 . A parte questo, F(x) ha una proprietà interessante. Se lo si integra per parti si ottiene:

$$F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = -t^x e^{-t} \,|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

La prima parte dell'integrale è zero ai due estremi, purché x≥0. In tal caso:

$$F(x) = x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Ripetendo il gioco dell'integrazione per parti, fino a che l'esponente di t è maggiore od eguale a 0, si ottiene per esempio:

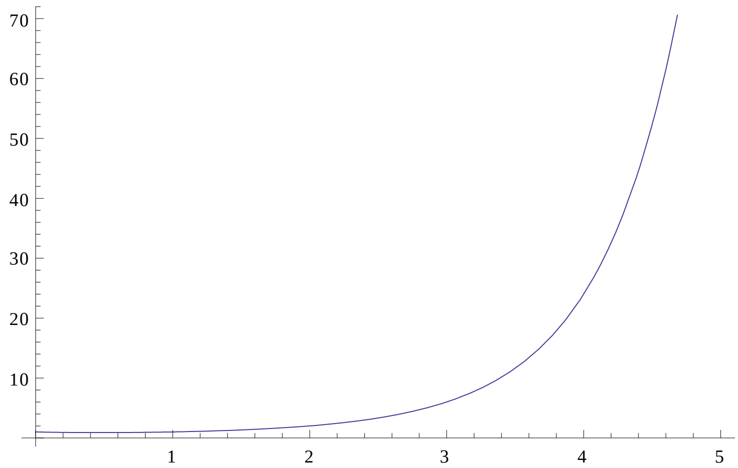
$$F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = x(x-1)(x-2)\int_0^\infty t^{x-3} e^{-t}\, dt$$

Se x è un numero intero abbiamo:

$$F(x) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n(n-1)(n-2)..1\int_0^\infty e^{-t}\, dt = n!$$

in quanto l'integrale di destra è uguale ad 1, come si verifica subito.

La funzione F(x) per x ≥0 è data da:



che interpola bene il fattoriale, anzi di fatto estende il fattoriale a tutti i numeri reali positivi.

Sfortunatamente il matematico Legendre definì la funzione Gamma come:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

e per qualche ragione questa funzione ebbe maggior fortuna della F(x). Per cui tutto resta più o meno lo stesso, ma n!=Γ(n+1), o, se vogliamo, Γ(n)= (n-1)! Più che altro una seccatura.

Scriviamo invece il nostro fattoriale generalizzato come x! = F(x), la quale viene così licenziata.

Sotto certe condizioni, che vedremo subito, l'integrale per x! può essere anche eseguito per valori complessi della variabile. Avremo:

$$z! = (x+iy)! = \int_0^\infty t^{x+iy}\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^x\, e^{iy\log t} e^{-t}\, dt$$

Da cui, sostituendo la solita:

$$e^{iy} = \cos y + i\, sin y$$

otteniamo l'utile relazione per la parte reale ed immaginaria del fattoriale complesso:

$$(x+iy)! = \int_0^\infty t^x \cos(y\, logt)\, e^{-t}\, dt + i \int_0^\infty t^x \sin\,(y\, logt) e^{-t}\, dt$$

nella quale i due integrali possono essere calcolati numericamente con la precisione necessaria. Ciò vale per x≥0, altrimenti si vede che la funzione integranda diviene infinita all'estremo inferiore, la condizione annunciata.

L'importante "relazione funzionale"

$$x! = \; x\,(x-1)!$$

ci convince che basta conoscere i valori della funzione fattoriale tra 0 e 1 per ricostruirla lungo l'intero asse reale positivo. E poiché la funzione è quasi costante tra 0 e 1, con un valore vicino a 0.9, vediamo che 3.5! non deve essere molto lontano da 3.5 · 2.5 · 1.5 (0.5)! con (0.5)! ≈ 0.9. Otterremmo il valore approssimato di 11.81, mentre, dalle tavole, Γ(4.5) = 3.5!= 11.63. Non così male.

Ma la maggior utilità della relazione funzionale viene dal fatto che essa ci permette di estendere la funzione z! a sinistra dell'asse immaginario (Re (z)= 0), essenzialmente fin dove ci pare. .

Abbiamo infatti che

$$(z+n)! = (z+n)(z+n-1)((z+n-2) \ldots (z+1)\, z!$$

Cioè:

$$z! = \frac{(z+n)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

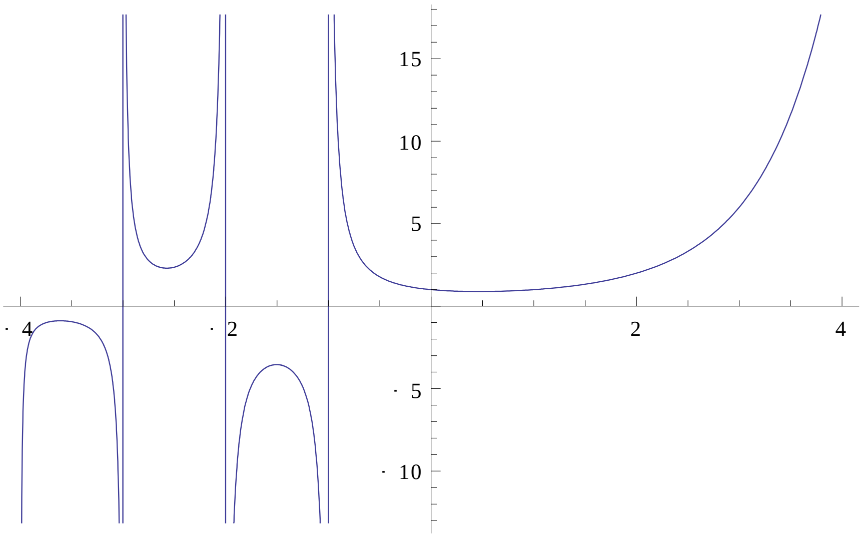
Questa formula viene usata soprattutto utilmente se z ha parte reale negativa ed n+z positiva.

Per esempio sia z = - 2.1 (reale per semplicità). Chiaramente (z+3 = 0.9) è positivo e quindi possiamo scrivere:

$$(-2.1)! = \frac{(0.9)!}{(-1.1)(-0.1)(0.9)}$$

Si può vedere che partendo da (0.9)! (=0.961766) si ottiene un risultato per -2.1! che coincide con il valore ottenuto direttamente mediante tavole o opportuni programmi di calcolo, cioè (-2.1)! = 9.71481.

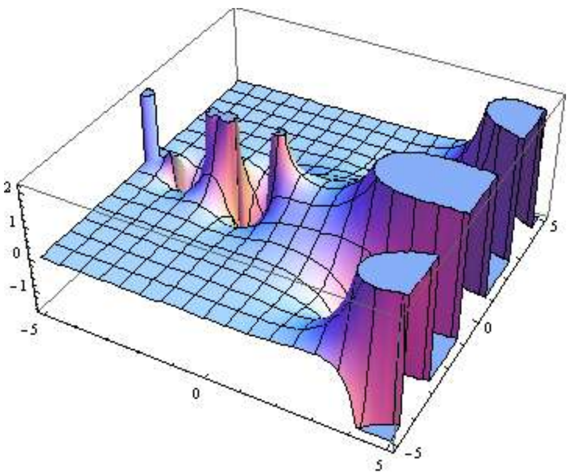
Possiamo allora per prima cosa estendere la nostra funzione ai numeri reali negativi:



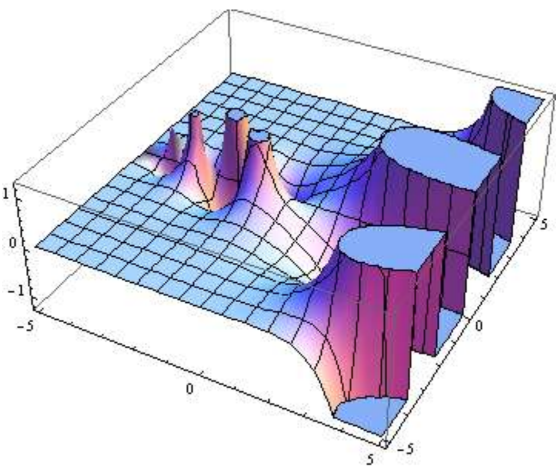
Da cui vediamo che la funzione presenta dei poli (valori infiniti) nei numeri interi negativi, come ci aspettavamo, anche se la loro struttura è forse inattesa.

In secondo luogo possiamo estendere la funzione all'intero piano complesso. Qui mi servirò di immagini calcolate col programma Mathematica:

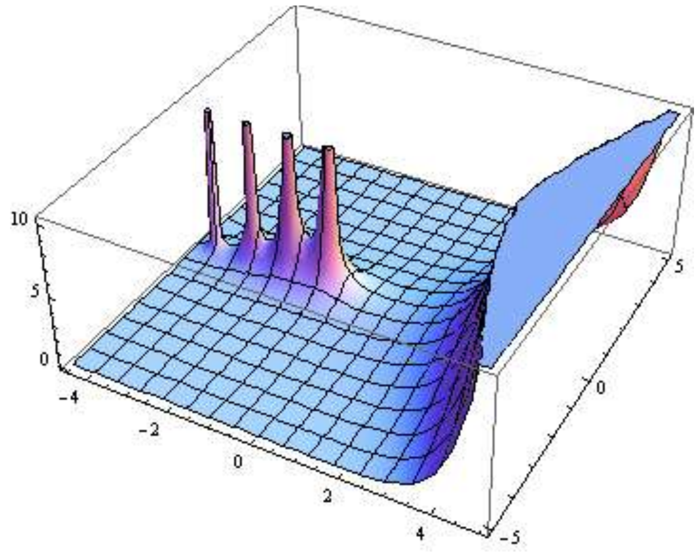
Parte reale:



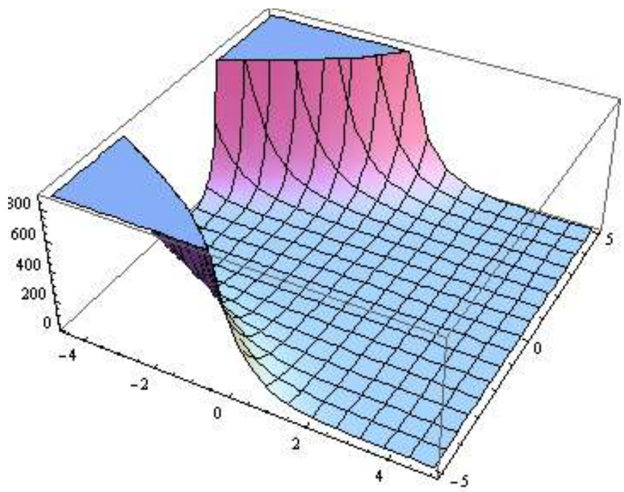
Parte Immaginaria:



Valore assoluto:



Dal diagramma del valore assoluto vediamo che la funzione Gamma ”completa” di parte reale e parte immaginaria non ha zeri. Questo lo si vede ancora meglio facendo il diagramma dell’inverso del valore assoluto, in cui i picchi che vanno all’infinito, cioè i poli, diventano zeri, e gli zeri, se ci fossero, diventerebbero poli. Gli zeri non si distinguono vista la risoluzione del diagramma, ma chiaramente di poli non ce ne sono.



Da dove spuntino le due “montagne” lo lascio indovinare al lettore. Secondo me, ciò che è difficile prevedere è che siano così ripide.

Spiace quasi abbandonare così una funzione così interessante e così studiata, ma prima o poi era inevitabile.