

di un numero decimale periodico, abbiamo scatenato un mostro, o evocato un genio dalla lampada di Aladino, la funzione Φ , che a sua volta genera una quantità di problemi. In altre parole, risolto il problema originale, non si chiude una pagina, ma si apre un libro. Così, risolvendo problemi di matematica, non si arriva alla fine di un libro, ma si generano nuovi volumi.

Possiamo dire che coloro che si occupano di teoria elementare dei numeri trovano - penso - uno spartiacque nella funzione Φ di Euler. Se lo oltrepassano, sono già da considerarsi quasi-esperti, altrimenti devono accontentarsi dei primi gradini della teoria. Non che i primi gradini siano poco interessanti: solo, come sempre avviene in matematica, lo sono meno.

Che vuol dire “passare l’ostacolo della funzione Φ ”? Per me vuol dire tre cose:

i) conoscerne la definizione

ii) saperla calcolare rapidamente

iii) conoscere la formula canonica per calcolarla e sapersene fare una ragione.

La parte ricreativa, cioè le applicazioni, verranno dopo.

I. Definizione.

Dato un numero n , la $\Phi(N)$ - leggi “Phi di N ” - è definita come il numero dei numeri inferiori ad N , primi con N . Un numero è primo con N , se l’unico divisore comune al numero e ad N è 1. Quindi, benché 1 non sia in genere accettato come numero primo, secondo questa definizione è primo con N e va sempre contato nella Φ , in quanto l’unico divisore comune con qualsiasi N non può essere altri che 1.

Dunque, per fare un esempio già abbastanza ricco, $\Phi(12)$ varrebbe 4, dato che primi con 12 sono 1, 5, 7, 11.

Questo è semplice, ma si vede subito che eseguire questo conteggio non è immediato, se N è un po’ grande. Un metodo concettualmente semplice è quello di scrivere in ordine tutte le frazioni:

$$\frac{1}{N}, \quad \frac{2}{N}, \quad \frac{3}{N}, \dots, \quad \frac{N-1}{N}, \quad \frac{N}{N}$$

Tutte le frazioni che non possono essere semplificate (e si riconoscono semplicemente guardando il denominatore, se è N oppure no) vanno contate nella

Phi. *Difatti*, esse possono essere semplificate solo se il numeratore ed il denominatore hanno uno o più fattori comuni, e quindi non sono primi fra loro.

Diamo il nostro esempio per 12:

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}$$

Semplifichiamo:

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{1}{1}$$

Le frazioni non semplificabili, che hanno 12 al denominatore, e quindi non hanno fattori comuni con esso, sono visibilmente quattro, che è il valore della $\Phi(12)$.

Tra l'altro, la tabellina da noi fatta ci dice di più di quello che le abbiamo chiesto. Il numero di frazioni con denominatore 3 ci dà la $\Phi(3) = 2$, il numero di quelle con denominatore 4 ci dà la $\Phi(4) = 2$, il numero di quelle con denominatore 6 ci dà la $\Phi(6) = 2$. Il solo problema è che per fare la tabellina ci vuole il suo tempo, anche se non occorre alcun volo pindarico della mente. In compenso non avremo calcolato solo la Φ del numero che ci interessa, ma anche quella di tutti i suoi divisori.

Un'altra cosa che quindi ci dice la nostra tabellina è che la somma delle Φ dei divisori di 12 vale 12. Si ricordi che i conti tornano solo se si aggiungono anche la $\Phi(12) = 4$, la $\Phi(2) = 1$ e la $\Phi(1) = 1$. Il fatto che il risultato valga in generale fu dimostrato da Gauss, e non possiamo aspettarci che sia banale.

Vediamo quindi che con l'aiuto di due informazioni supplementari possiamo ricostruire l'intera tavola della Phi, partendo da $\Phi(1) = 1$ e $\Phi(2) = 1$.

Le informazioni sono che

(i) $\Phi(p) = p-1$ se p è primo (il che è ovvio); e che

(ii) $\Phi(N) = N - (\text{somma delle } \Phi(d), \text{ dove } d \text{ sono i divisori di } N)$, ciò che abbiamo appena mostrato.

Quindi:

$$\Phi(1) = 1;$$

$$\Phi(2) = 1 \text{ (cioè } 2-1, \text{ perché } 2 \text{ è primo);}$$

$$\Phi(3) = 2 \text{ (cioè } 3-1, \text{ perché } 3 \text{ è primo);}$$

$$\Phi(4) = 4 - \Phi(2) - \Phi(1) = 4 - 1 - 1 = 2.$$

$$\Phi(5) = 5 - 1 = 4, \text{ perché } 5 \text{ è primo}$$

$$\Phi(6) = 6 - \Phi(3) - \Phi(2) - \Phi(1) = 2$$

Eccetera...fino all'infinito.

II. Calcolo diretto, primo modo.

Supponiamo ora che il numero N sia molto grande.

Se il numero è primo, $N = p$, è evidente che i numeri primi con p sono $p-1$. Questo ragionamento ci dà quindi subito il valore $\Phi(p) = (p - 1)$, per p primo.

Supponiamo ora di prendere N non primo, per esempio 20. Fare la tabella indicata incomincia ad essere un poco tedioso.

Procediamo invece in questo modo:

i) scomponiamo in fattori primi. Il lavoro è semplice, e troviamo che

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

ii) Dividiamo N per il primo fattore primo, che è 2. Il risultato è 10. Questo ci dice che in 20 ci sono in 10 multipli di 2 (¹). Tutti hanno il fattore 2 in comune con 20. Essi sono 2,4,6,8,10,12,14,16,18, 20. Essi vanno quindi sottratti a 20 per avere la nostra Φ . Il risultato di questa operazione è 10. Notiamo inoltre che anche $2^2 = 4$ è presente fra questi numeri, e con lui 8, 12, 16, 20. *Dobbiamo sottrarre di nuovo i cinque (compreso 4) multipli di 4? No, perché li abbiamo già sottratti.*

Facciamo la divisione di ciò che resta (cioè 10) per l'altro divisore di 20, cioè 10/5, e troviamo 2. I due fattori non primi con 20 sono 5 e 15. Questi non sono divisibili per 2, perché i numeri divisibili per 2 li abbiamo già eliminati. Quindi $\Phi(20) = 10 - 2 = 8$.

Se avessimo incominciato a dividere per 5, avremmo trovato $20/5 = 4$, che sottratto a 20 dà 16. Ora dividiamo 16 per 2, otteniamo 8, lo sottraiamo a 16 e troviamo $\Phi(20) = 16 - 8 = 8$, cioè lo stesso risultato.

Nota la fattorizzazione di un numero N , diventa allora facile calcolare la $\Phi(N)$.

Per esempio, $21 = 3 \times 7$, e quindi si deve fare $21/3 = 7$. Togliere 7 a 21, resta 14, dividere 14 per 7, otteniamo 2. Togliere 2 a 14, resta 12, che dovrebbe essere $\Phi(21)$. Si verifica e sembra strano, ma è corretto, e questo risultato lo abbiamo già usato più sopra. Si può anche verificare che il risultato non cambia incominciando con 7 e proseguendo con 3.

III. Calcolo diretto, secondo modo, ovvero “dimostrare la formula canonica di Euler”

$$\Phi(N = p_1^a p_2^b p_3^c p_4^d \dots) = N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \left(1 - \frac{1}{p_4}\right) \dots$$

La formula che abbiamo applicato in II, magari senza accorgercene (verificare!), è:

$$\begin{aligned} \Phi(N = p_1^a p_2^b) &= N - \frac{N}{p_1} - \frac{N - \frac{N}{p_1}}{p_2} = N \left(\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) - \frac{1 - \frac{1}{p_1}}{p_2} \right) = N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) = \\ &= p_1^a p_2^b \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \end{aligned}$$

Come si può facilmente verificare, la formula è generalizzabile a più di due fattori primi: basta considerare i fattori uno per volta in successione. La chiave per procedere dal primo fattore comune al secondo è stata ricostruire correttamente il numeratore del terzo elemento. Il passo successivo sarebbe:

$$\Phi(N = p_1^a p_2^b p_3^c) = \left(N - \frac{N}{p_1} - \frac{N - \frac{N}{p_1}}{p_2} \right) - \frac{N - \frac{N}{p_1} - \frac{N - \frac{N}{p_1}}{p_2}}{p_3} \text{ etc.}$$

La generalizzazione è la formula di Euler.

IV. E poi?

E poi direi di dare un'occhiata al sito al libro di A.H. Beiler, "Recreations in the theory of numbers", capo IX, a livello di matematico pedone, o a

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_totient_function

o alla sua (più povera) versione italiana, dove si potranno trovare molte formule, qualcuna delle quali potrà forse eccitare la nostra curiosità.

NOTA:

(¹) Molti trovano di primo acchito un po' ostico il fatto che $N/2$ ci dia *anche* il numero di multipli di 2 non primi con N. Non mi vergogno di dire che a suo tempo anch'io ho trovato il ragionamento non immediato. Me lo sono spiegato nel modo seguente: si pensi ad un mucchietto di N palline, per esempio 14. Se 2 è un divisore di 14 (e lo è, con risultato 7), possiamo fare 7 mucchietti di due palline ciascuno.

Prendiamo un primo mucchietto qualsiasi, che conterrà due palline. Aggiungiamo un secondo mucchietto e avremo 4 palline. Aggiungendo un mucchietto alla volta, avremo *sette* numeri, tutti multipli di 2, che sono i multipli di 2 non primi con 14.