GEOMETRIE NON EUCLIDEE

(Un'infarinatura per matematici che imparano a camminare e desiderano correre)

Parte I.

I fondamenti degli "Elementi di Euclide", e un'idea della Dualità.

Mi ricordo che quando ero ragazzino di tredici anni, ebbi una lunga discussione con amico studente di ingegneria che mi diceva che due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito.
Io non ci potevo credere. Per me la parallela ad una retta è tale perché proprio non l'incontra mai, come le rotaie di un binario ferroviario. Andai a casa molto contrariato. Mio nonno, che se ne intendeva, mi disse: dire che due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito è come dire che non si incontrano mai. Piuttosto, il bello è accettare che se tu cammini in una direzione del tuo binario fino all'infinito e (indubbiamente dopo un lungo cammino) trovi il punto in cui le due rotaie si incontrano, questo è lo stesso punto in cui si incontrano seguendole nella direzione opposta. Dunque c'è solo un punto di incontro all'infinito, non due.

Molto più tardi trovai che infatti si può costruire un'interessante branca della geometria proprio giocando su questi punti (e rette, e piani) all'infinito, che evidentemente nessuno raggiunge mai, e quindi in geometria Euclidea classica non vede mai. E tanto per annunciare qualcosa di curioso, un *piano* contiene infinite rette, ma una sola retta all'infinito, che congiunge tutti i punti all'infinito di tutte le rette (e quindi per definizione non può contenere punti al finito), mentre lo *spazio* contiene infiniti piani, ma ha un solo piano all'infinito, su cui giacciono tutte le rette all'infinito di tutti i piani.

Fra l'altro questo ci dà un punto di partenza per comprendere perché le parallele si incontrano in un solo punto all'infinito, o, in altre parole, perché una retta ha un punto all'infinito e non due, cioè, seguendo un binario verso destra troviamo all'infinito il punto di incontro delle due rotaie parallele, e se andiamo verso sinistra troviamo lo stesso punto di incontro all'infinito.

Questi due punti, come afferma il primo postulato di Euclide (che vedremo in seguito), hanno una retta in comune, e questa retta, fatta di punti all'infinito, è la retta all'infinito del nostro piano. *Se i due punti nel caso delle parallele non coincidessero ciò vorrebbe dire che due rette si incontrano in due punti.* E allora, può chiedere qualcuno? Chi ha detto che due rette si devono incontrare in un punto? In effetti, Euclide non lo ha detto, anche se molti testi lasciano supporre che lo abbia detto proprio lui. Ma non lo ha detto per una ragione molto semplice: il suo famoso Quinto Postulato dice che esistono rette, le parallele, che non si incontrano mai. E quindi il povero Euclide avrebbe costruito la sua geometria du due postulati contradditorii.

https://pixabay.com/it/ferroviario-autunno-natura-rotaie-1126082/

Se una retta avesse due distinti punti all'infinito, uno a destra e uno a sinistra, per questi due punti all'infinito passerebbero due rette, cioè la retta di cui parliamo e la retta all'infinito. Questo, però, va contro un postulato di Euclide, il Primo, che afferma che per due punti si può tracciare una e una sola retta, cioè due punti hanno una sola retta in comune. Euclide non lo dice proprio così, ma non esageriamo della nostra critica. Qui però, accettando che il punto all'infinito in cui si incontrano due parallele possa essere trattato come ogni onesto punto al finito, vediamo che stiamo costruendo una interessante struttura. L'affermazione sulle rette ed il postulato sui punti che verrebbero violati se una retta avesse due punti all'infinito avrebbero una strana somiglianza. In certo senso, dato uno dei due, si trova l'altro scambiando tra loro le parole "punto" e "retta".

	Punti		**Retta**	
Due		**hanno 1**		**in comune**
	Rette		**Punto**	

Questa proprietà è un primo, semplice esempio di una proprietà più generale che si chiama "dualità" ed è valida per certe branche della geometria. Inoltre, introducendo i punti e le rette all'infinito, questa proprietà non ha più eccezioni, quali sarebbe l'esistenza di rette parallele. Inoltre , così facendo, abbiamo costruito un ulteriore postulato "duale" del primo.

La branca della geometria che gioca con i punti all'infinito ha un'applicazione pratica che tutti conosciamo, la teoria della prospettiva. Se disegniamo una strada o una ferroviache fugge davanti a noi (i cui binari paralleli sono divenuti le due rette azzurre convergenti), in prospettiva possiamo disegnare il suo punto all'infinito (in rosso), che è sull'orizzonte, il quale a sua volta è la rappresentazione grafica della retta all'infinito (in verde).

https://static.pexels.com/photos/1425/rails-train-path-straight.jpg

Pr il momento non procederemo su questa via: un problema più pressante ci sta di fronte, in quanto, come forse sapete, la storia delle parallele è interessante per se stessa.

Parte II.
II. V Postulato, Geometrie non euclidee, esempi intuitivi.

Duemilatrecento anni fa Euclide mise insieme su basi che riteneva inoppugnabili (ma chi era nella testa di Euclide per dire quanto ci credesse?) la geometria.

I suoi elementi per costruirla, come i mattoncini del lego, sono

23 **definizioni**

Le elenco ma non bisogna spaventarsi. Se e quando necessario, vi si farà riferimento e l'animoso lettore saprà dove trovarle. Devo anche confessare che trovare traduzioni per me soddisfacenti (cioè fedeli e chiare) è stato impossibile. Le correzioni in rosso sono mie, se si tratta di parole. Intere frasi in rosso indicano definizioni che sono al limite della comprensibilità.

Def. 1: Un punto è ciò che non ha parti.

Def. 2: Una linea è lunghezza senza larghezza.

Def. 3: Gli estremi di una linea sono punti.

Def. 4: Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

Def. 5: Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

Def. 6: Gli estremi di una superficie sono linee.

Def. 7: Una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.

Def. 8: Un angolo piano è l'inclinazione l'una rispetto all'altra di due linee in un piano che si incontrano e non giacciono sulla stessa linea retta.

Def. 9: Quando le linee che comprendono l'angolo siano rette, l'angolo è chiamato rettilineo.

Def. 10: Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta è chiamata perpendicolare a quella su cui è innalzata.

Def. 11: Dicesi ottuso un angolo maggiore di un angolo retto.

Def. 12: Dicesi acuto un angolo minore di un angolo retto.

Def. 13:Confine è ciò che è termine di qualcosa.

Def. 14: Figura è ciò che è compreso da uno o più confini

Def. 15: Cerchio è una figura piana circondata da una sola linea, tale che tutte le rette che incidono su di essa a partire da un medesimo punto tra quelli interni alla figura, siano uguali tra loro.

Def. 16: Quel punto è chiamato centro del cerchio.

Def. 17 Diametro del cerchio è qualsiasi retta condotta per il centro e delimitata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio. Tale retta taglia anche il cerchio a metà.

Def. 18: Semicerchio è la figura circondata dal diametro e dall'arco interecettato da esso. Il centro del semicerchio è lo stesso punto che è anche centro del cerchio.

Def. 19: Figure rettilinee sono quelle racchiuse da rette. In particolare sono dette trilatere le figure racchiuse da tre rette, quadrilatere quelle racchiuse da quattro rette, multilatere (o polilatere) quelle racchiuse da più di quattro rette.

Def. 20: Dicesi triangolo equilatero la figura trilatera che ha i tre lati uguali, isoscele quella che ha due soli lati uguali, scaleno quello che ha i tre lati disuguali.

Def. 21: Inoltre, dicesi triangolo rettangolo la figura trilatera che ha un angolo retto, ottusangolo quella che ha un angolo ottuso, acutangolo quella che ha i tre angoli acuti.

Def. 22: Dicesi quadrato la figura quadrilatera che ha i lati eguali e gli angoli retti; rettangolo (eteromece) la figura quadrilatera che ha gli angoli retti, ma i lati diseguali; rombo la figura quadrilatera che è equilatera ma non ha gli angoli retti; romboide la figura quadrilatera che ha sia i lati che gli angoli opposti uguali tra loro, e che non ha né i lati eguali né gli angoli retti. I quadrilateri a parte questi sono chiamati trapezi.

Def. 23: Sono dette parallele le rette giacenti nello stesso piano che, prolungate all'infinito da una e dall'altra parte, né da una né dall'altra si incontrano tra loro.

Cinque postulati

(in greco "aitémata"), di cui non viene data dimostrazione.
* I) Un segmento di linea retta [e uno solo] può essere disegnato unendo due punti a caso.
* II) Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta
* III) Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro
* IV) Tutti gli angoli retti sono congruenti (o uguali) tra loro
* V) Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.

Questo postulato, espresso così, è un po' complicato da seguire, anche se può essere utile. Diventa più chiaro se lo si esprime nel modo seguente:
* (Vb) In un piano, dati una retta ed un punto fuori di essa, si può condurre una e una sola parallela alla retta data.

La definizione 23 stabilisce che due rette sono parallele se giacciono sullo stesso piano e continuate in entrambe le direzioni non si incontrano né dall'una né dall'altra parte.

Cinque nozioni comuni

* 1) Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
* 2) Aggiungendo (quantità) uguali a (quantità) uguali le somme sono uguali

*   3) Sottraendo (quantità) uguali da (quantità) uguali i resti sono uguali
*   4) Cose che coincidono con un'altra sono uguali all'altra
*   5) L'intero è maggiore della parte

Non dice qui che si possono far slittare figure piane su un piano, e che quelle che sovrapposte coincidono sono eguali. Cioè, come fu notato, questa definizione di eguaglianza è poco chiara e del resto Euclide non la usa quasi mai.

Una semplice lettura senza grandi pretese lascia supporre che, al di là delle difficoltà di traduzione, queste definizioni, postulati e nozioni comuni siano lungi dall'essere soddisfacenti e debbano esser state oggetto di discussione per secoli. Ma mentre si trovò presto qualche modo di giustificare definizioni, nozioni comuni e i primi quattro postulati, si notò altrettanto presto che il postulato V è differente dagli altri per la sua lunghezza, e per il fatto che non è intuitivo come gli altri (ma gli altri, sono proprio tanto intuitivi?).
Ad ogni modo, molti matematici, fin dai tempi più antichi ritennero che questo non fosse propriamente un postulato (di cui non si richiede – né si può dare - dimostrazione), ma un teorema (che invece può – e quindi deve - essere dimostrato) e si arrabattarono inutilmente per duemila anni cercando una dimostrazione.
Da notare che le prime ventotto "proposizioni" di Euclide non richiedono il quinto postulato per la loro dimostrazione.

Per duemila anni si cercò di dimostrare il "teorema", cioè che dato un punto ed una retta fuori di essi si può tracciare per il punto una e una sola retta parallela alla retta data. Nessuno ci riuscì, anche se in molti casi si dimostrarono lemmi (introduzioni a teoremi) e teoremi secondari che rimasero validi quando finalmente la risposta alla questione principale fu data secondo le linee che seguono.

Circa duecento anni fa si incominciò a pensare che non solo il V postulato non fosse un teorema, ma si potessero costruire delle geometria "diverse", per esempio una geometria in cui dati una retta *r* ed un punto *P* fuori di essa non esistono rette passanti per *P* e parallele a *r* (che cioè non la incontrano). Oppure una geometria in cui per *P* passa più di una parallela ad *r*. Il "Princeps mathematicorum" del tempo, Carlo Federico Gauss, lavorò su questo progetto, ma non pubblico nulla perché, disse, "Temeva lo schiamazzo dei Beoti" (aveva una certa cultura classica).

Ora, avere un concetto di queste "geometrie diverse" o "non Euclidee" sembra gran cosa, ma in sè non lo è. Le cose, semmai, diventano complicate dopo. Ma vediamo alcune semplici "geometrie diverse".

Anzitutto costruiamo una **geometria senza parallele.**
Costruiamo un cubo o esaedro. Anzi, a noi basta costruire *un vertice* di un esaedro. Si prende un quadrato grande, si disegnano quattro quadrati che lo dividono in parti eguali, tagliamo via uno dei quadrati, ma non lo buttiamo via perché ci servirà dopo.

Poi incolliamo lungo i due tagli che abbiamo fatto la figura a L che ci risulta. Ora abbiamo un vertice di cubo.
Se su una faccia del cubo, o anche a cavallo di uno spigolo, ma non a cavallo del vertice che abbiamo costruito noi disegniamo figure piane, esse hanno le stesse proprietà che sul piano. Per esempio la somma degli angoli interni di un triangolo vale due angoli retti e non ci può essere un triangolo con due o tre angoli retti. Per esempio, due parallele non si incontrano. Per esempio, la circonferenza del cerchio vale $2\pi R$. Per esempio, se disegniamo un triangolo e supponiamo che sia il percorso di un gruppo di artiglieri che trasportano un cannone che punta sempre in una certa direzione, fatto il giro del triangolo troviamo che il cannone punta nella stessa direzione.

Ma, *appena includiamo nei nostri vari esercizi l'unico vertice che abbiamo* troviamo che possiamo avere un triangolo in cui i tre angoli sono retti – cosa impossibile nel piano. La figura sottostante vi fa vedere un triangolo nel piano (Fig.I) e uno anomalo sul cubo (Fig.2). Si vede anche che se il segmento azzurro è un cannone, gli artiglieri che lo portano a spasso sul triangolo A B C puntandolo nella stessa direzione, si ritrovano in A col triangolo sempre puntato nella stessa direzione, mentre sul cubo si trovano in ritardo o in anticipo di 90°, secondo la direzione in cui percorrono il triangolo ABC. E possiamo anche vedere che facendo quattro giri intorno al medesimo vertice, il cannone torna a puntare nella direzione originale. Curioso, vero?

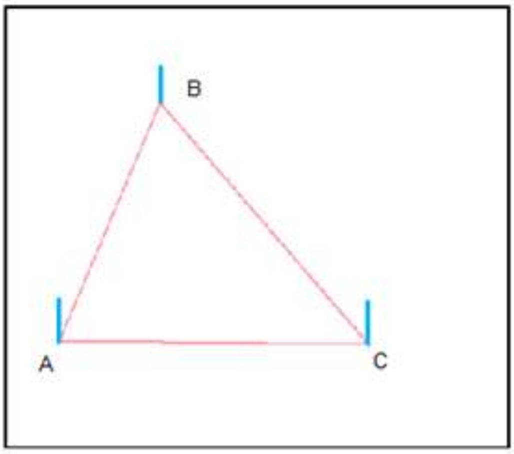


Fig.I

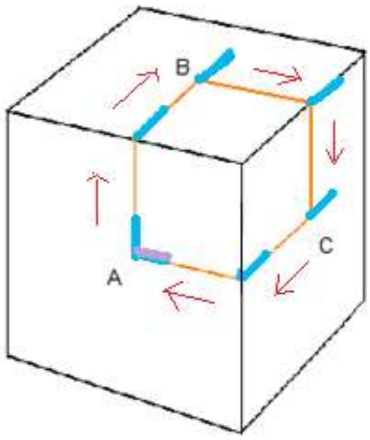


Fig.2

In secondo luogo due rette parallele si incontrano.
Notate che per provare questo bisogna saper disegnare delle rette su un cubo. Lo si fa sviluppando il cubo sul piano in varti modi che ci permettano di tracciare le nostre rette con un righello.
In questo sviluppo, tanto la retta arancione quanto la retta blu sono rette e nella faccia di partenza (Fig.1) sono parallele.

Però la retta blu della figura di destra (Fig.3) continua sulla faccia arancione della figura di partenza.

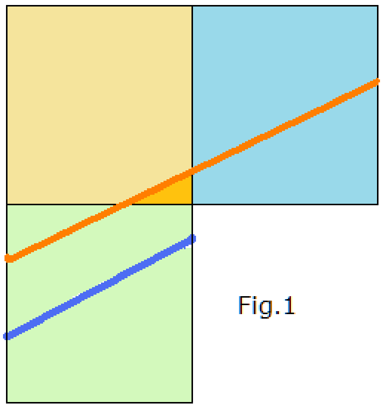


Fig.1

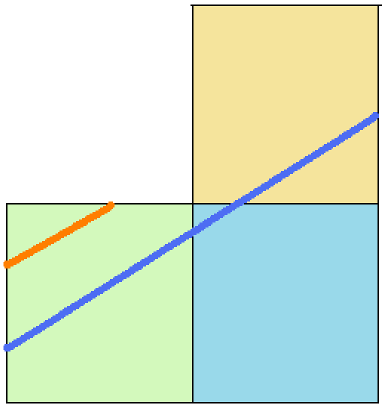


Fig.2

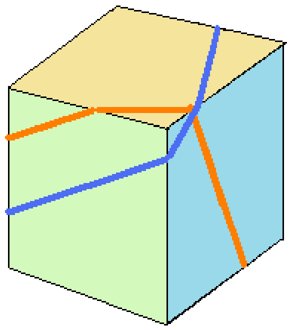
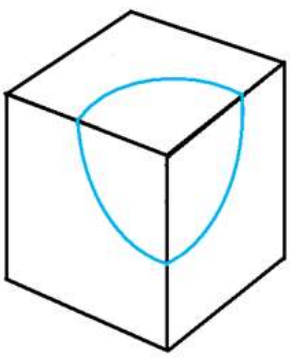
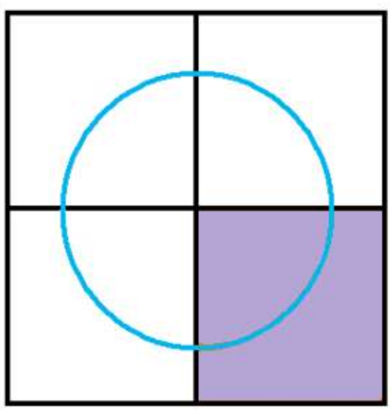


Fig.3

Il risultato finale (Fig.3) mostra che le due rette, partite come parallele, si incrociano, cioè hanno un punto in comune.

In terzo luogo la circonferenza è una frazione di $2\pi R$ (per esempio, quella disegnata in figura è $\frac{3}{2}\pi R$).
Lo si vede subito perché se disegniamo un cerchio che comprende un vertice del cubo ne perdiamo il quarto “violetto”.

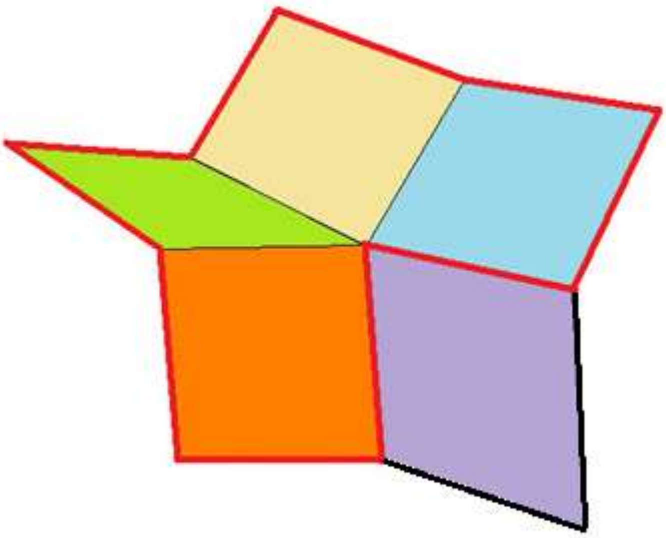




Che è successo? La geometria non è più quella.

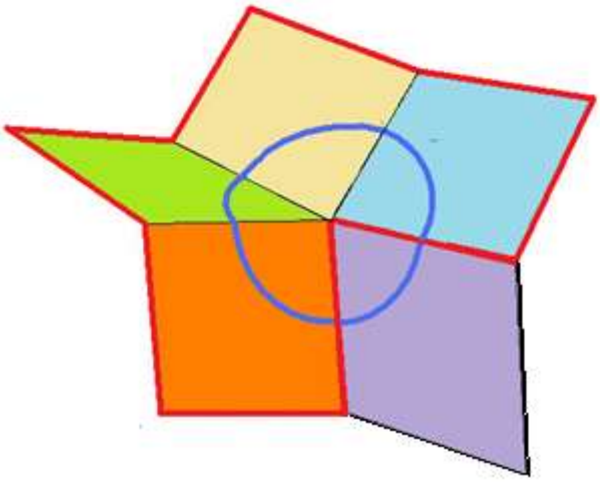
Ed ora vediamo **una geometria con più di una parallela.**

Supponiamo di prendere un altro quadrato, tracciare le due rette che lo dividono in quattro parti eguali, Poi tagliamo con un paio di forbici dalla periferia al centro del quadrato grande lungo una delle rette. A questo punto inseriamo il quadrato che avevamo avanzato costruendo il cubo e incolliamo i due lati ai due lati del taglio. Otteniamo così una specie di sella. Nel caso del cubo, per così dire, avevamo troppo poca superficie a disposizione, qui ne abbiamo troppa.



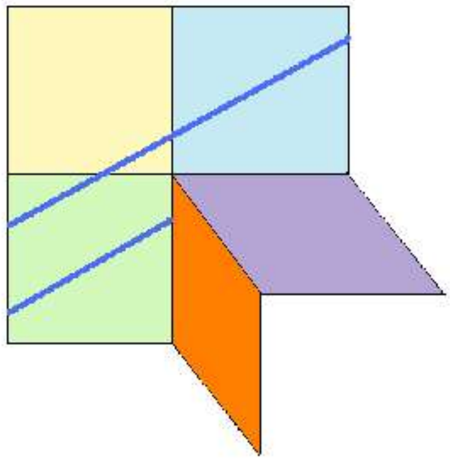
Nella figura, la parte con il bordo rosso è il quadrato originale. Il quadrato lilla è quello che avevamo avanzato costruendo il nostro vertice di cubo nel caso precedente.

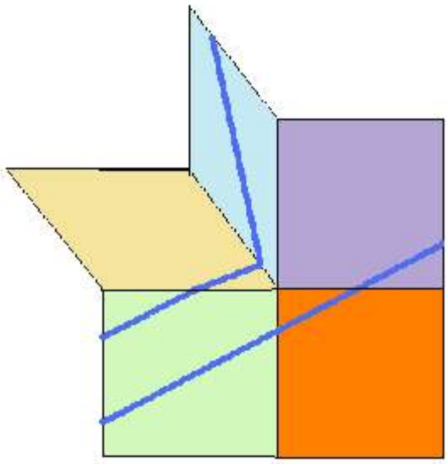
Di nuovo, se evitiamo il punto centrale (punto sella) tutto va bene. Ma se includiamo nei nostri disegni il punto centrale, abbiamo altre sorprese:
- si possono costruire triangoli in cui la somma degli angoli interni è minore di 180 gradi (impossibile nel piano);
- due rette parallele divergono;
- la circonferenza è più lunga di $2\pi R$ (nel nostro caso è $\left(\frac{5}{2}\right)\pi R$)

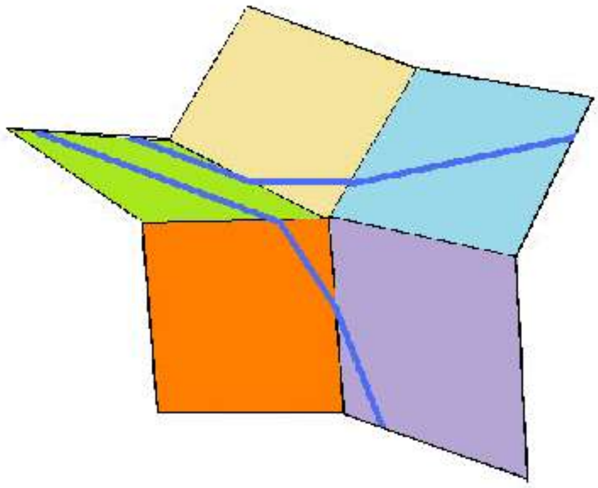


- quando giungono al punto di partenza, gli artiglieri trovano che il cannone punta a 90 gradi rispetto all'orientazione iniziale, in direzione opposta al caso del cubo..

Di nuovo, la geometria non è più quella.
Anche sulla sella le parallele si comportano in modo strano se includono il punto sella: invece di restare parallele equidistanti come sul piano, o di incrociarsi, come sul vertice di un cubo, divergono.

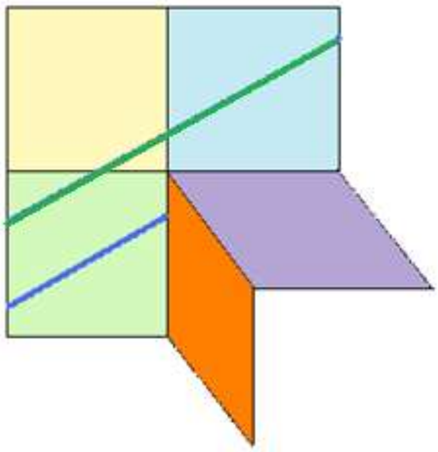


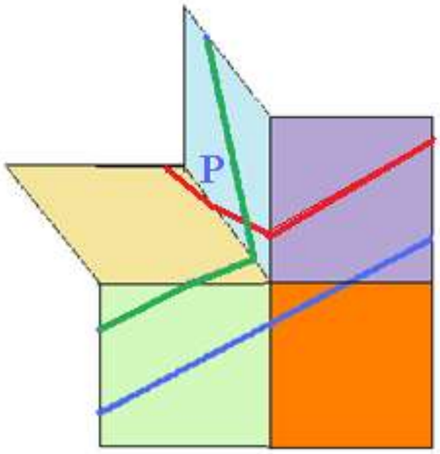


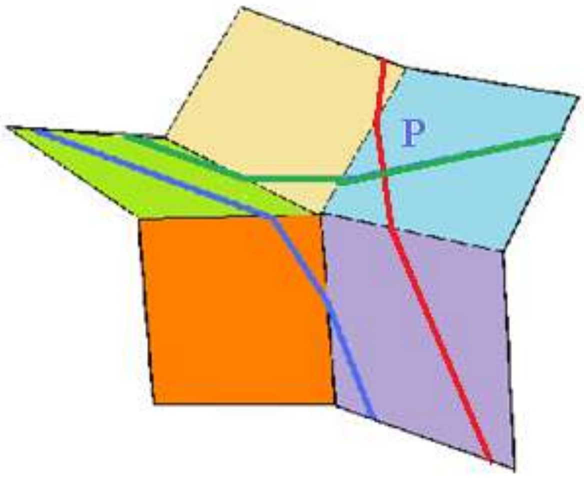


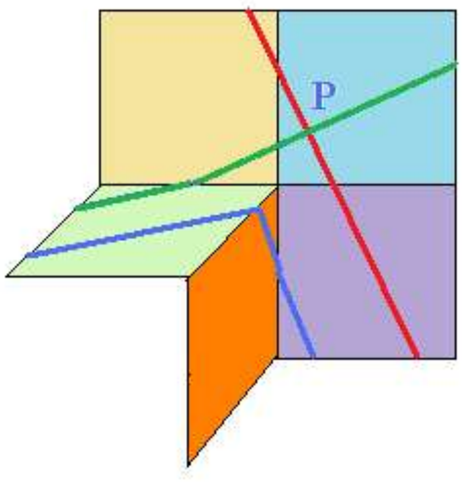
Il problema, tanto per il cubo quanto per la sella, evidentemente sta nel punto vertice. Questo è un punto *"singolare"*.

Non solo le parallele divergono, ma anche, per un punto passano due parallele ad una retta.
Nel disegno allegato, presa la linea blu come nostra "retta" di riferimento, vediamo che per il punto P passano due parallele alla linea blu: la linea verde, che è certo parallela nel quadrato verde, e la linea rossa, che è certo parallela nel quadrato viola. Entrambe le linee poi divergono e non incontreranno mai la linea blu. Secondo la nostra vecchia definizione di parallele, invece, data una retta ed un punto fuori di essa, si può trovare solo una e una sola parallela (retta che non incontra "mai" la retta data).

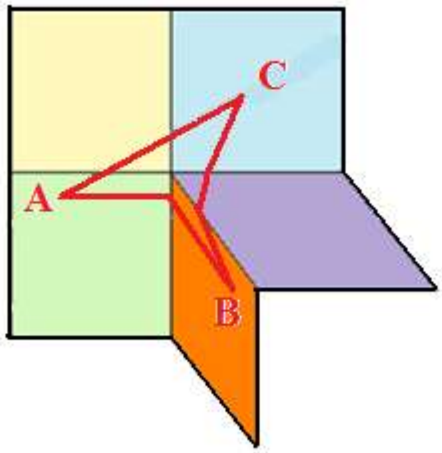




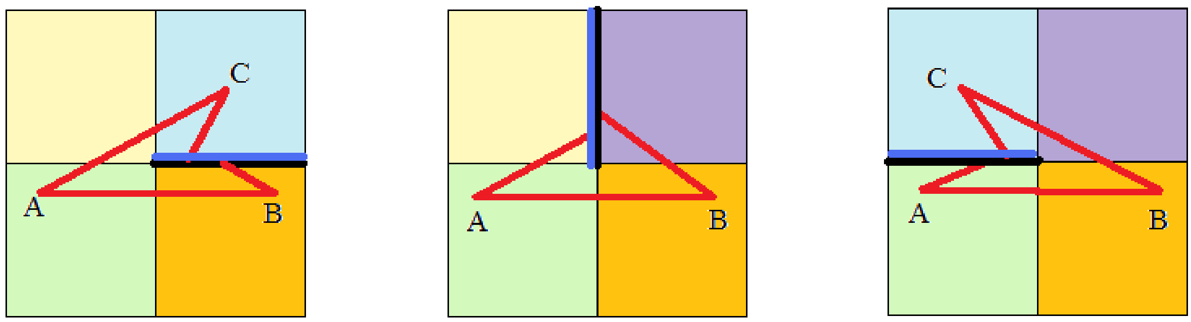




E naturalmente possiamo prevedere che i triangoli che includono il punto sella siano più magri di quelli tracciati sul cubo. Un triangolo come quello denominato ABC in figura ha tre angoli di circa trenta gradi ciascuno in media, il che – a occhio - dà una somma degli angoli interni di circa 90 gradi invece che 180°.



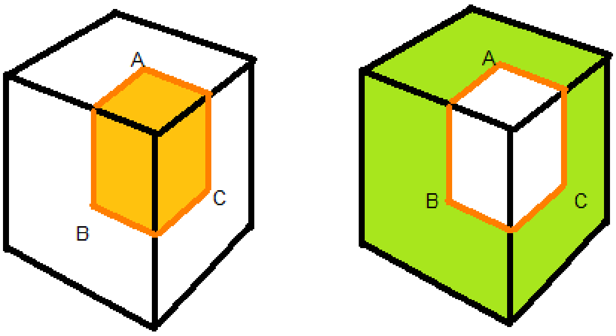
La costruzione è (più o meno) come segue:



La linea nera e blu indica i tagli dove manca una faccia. Ma le figure dimostrano che tutti i lati, i quali si estendono su due o tre facce, sono segmenti di retta.

I nostri (cinque) poliedri regolari anche loro hanno dei punti singolari, i vertici, in cui analoghi fenomeni si riproducono. In una sfera tutti i punti sono in certo senso singolari, e quindi su una sfera i triangoli, le parallele, le circonferenze, i trasporti di cannoni presentano qualitativamente gli stessi problemi che esistono sul cubo intorno al punto singolare, ma i problemi aumentano man mano che aumentiamo la percentuale di area della sfera che interessiamo nei nostri esercizi, semplicemente perché aumentiamo il numero di punti singolari inclusi nel nostro problema. Dunque, per esempio, la lunghezza della circonferenza dipenderà dall’area da essa racchiusa.

Ancora sui triangoli in cui la somma degli angoli interni è diversa da 180 gradi.



Consideriamo il nostro triangolo ABC che a prima vista presenta tre angoli retti. Se noi definiamo triangolo la figura su un cubo costituita da *tre segmenti di retta che uniscono tre punti*, notiamo che la figura verde esterna al triangolo arancione è anche lei un triangolo ad ogni buon diritto. E questo triangolo ha tre angoli retti ad ogni vertice, per un totale di nove angoli retti, 810 gradi, altro che 180 gradi come sul piano!
Di nuovo, tracciando figure su un cubo o su un altro poliedro, quanti più punti singolari si includono, tanto più i fenomeni strani aumentano. Però, dato che i "punti singolari" sono separati fra loro, i problemi aumentano per così dire a gradini. Sulla sfera, invece, dove tutti i punti sono “singolari”, non si procede a gradini e quanto più grandi sono le aree coinvolte, tanto più grandi sono le deviazioni dalla geometria come noi la conosciamo.

Parte III.
Che cosa è una retta? Cenno sulla curvatura intrinseca e il “theorema egregium” di Gauss.

Supponiamo che sulla superficie di una grande sfera vivano piccoli esseri piatti, in due dimensioni. Essi non hanno nessuna concezione della terza dimensione, e quindi del fatto che il mondo in cui abitano è una superficie curva che si sviluppa su tre dimensioni. (Non sono esseri particolarmente stupidi, per quanto piatti: anche noi, dopotutto , viviamo su una sfera, che però ci pare piatta. Esiste addirittura ancora – credo - una società di gente convinta che la Terra sia piatta). Finché si contentano di disegnare triangoli piccoli, la somma degli angoli interni di un triangolo vale invariabilmente due angoli retti, le parallele non si incontrano mai, il trasporto di un cannone non desta sorprese e la circonferenza di un cerchio è $2\pi R$.
Tuttavia le creature, andando a grandi distanze possono capire che la geometria non è quella di un piano, che loro avranno studiato in teoria come la geometria che meglio

rappresenta una porzione piccola del loro mondo. E se non possono staccarsi dal piano?

Alla fine, insomma, vediamo che aveva ragione Euclide a considerare il suo quinto postulato come un postulato e non come un teorema. Su un cubo (o una sfera) due parallele si incontrano (e quindi non ci sono parallele nel senso inteso da Euclide). Intorno ad un punto sella divergono, per cui si possono accomodare altre parallele.

Non si può quindi dimostrare che dati una retta ed un punto fuori di essa si può tracciare una ed una sola parallela alla retta data. Se questa affermazione è considerata un teorema, che pure si basa su definizioni ed assiomi della geometria di Euclide, *esso è un teorema non "decidibile"*. Soltanto, a partire dalle diverse risposte che preferiamo dare a quel teorema, tutte egualmente valide, si creano differenti geometrie.
In ultima analisi è un fatto sperimentale decidere se nel nostro mondo valga la geometria di Euclide (una sola parallela) od altra. Il risultato curioso è che su zone relativamente piccole la geometria di Euclide va sempre bene, ma se si guarda più lontano, per esempio con telescopi potenti, si vede che essa non basta più e ne occorre un'altra.

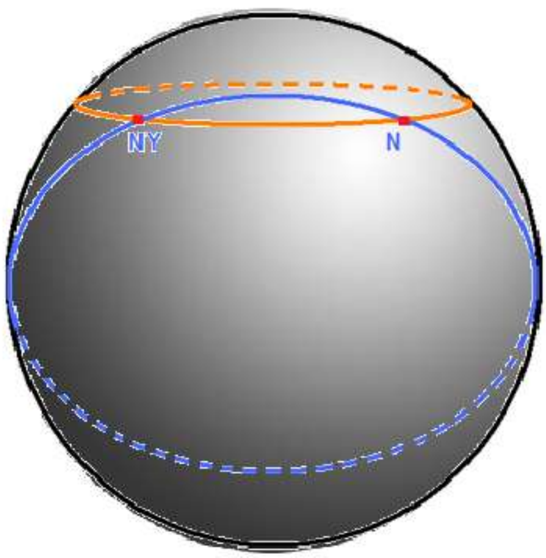
Qualcuno potrà dire: è chiaro che la geometria che vale sul piano non può valere su un cubo e su una sfera. In particolare, noi non possiamo tracciare rette su una sfera, perché le rette sono diritte e la superficie della sfera è curva. Quindi una retta esce subito dalla sfera.
Questa osservazione è perfettamente corretta e coerente con la definizione di parallele data da Euclide. Molto sovente, quando un insegnante parla o noi troviamo qualcosa di scritto su un libro, non osiamo fare obiezioni, che in genere sono piene di buon senso. Fare obiezioni meditate e ricevere buone risposte è il modo migliore di imparare. Anzi, andrei anche più in là: a meno che uno non lo voglia fare apposta, è impossibile fare domande stupide.

Dunque, quando si parla di "rette su una sfera" non si parla propriamente di rette, ma di linee (inevitabilmente curve) che hanno molte delle proprietà di una retta, eccettuata, appunto, quella di essere diritte ed uscire in teoria immediatamente dalla sfera.
Euclide non definisce mai la retta, ma dice che è un concetto primitivo. Se noi riuscissimo a parlare con esseri che vivono su un altro mondo, magari troveremmo che i loro concetti primitivi sono diversi. Quello che importa sono certe proprietà della retta: la più importante, che particolarmente impressionava il filosofo Kant, era che dati due punti, si può tracciare uno ed un solo segmento di retta che li congiunge, e questo segmento di retta rappresenta il più breve percorso fra i due punti. Per quanto ne so io, questa seconda proprietà della retta in passato era presa come non dimostrabile e più o meno evidente. Assomiglia al Primo Postulato di Euclide, ma in esso non si parla di lunghezza o brevità del percorso. Però, per esempio, si sapeva

che tendendo un elastico fra due punti su di un piano esso si disponeva secondo un segmento di retta. In seguito se ne poté dare una dimostrazione matematica. Ma, come si capisce bene, la dimostrazione matematica è legata ad una definizione di distanza. Per esempio, nella “geometria del taxista” o “di Manhattan” (che magari vedremo in altra occasione) la retta non è il cammino più breve fra due punti, a meno che accettiamo che per due punti passi più di una retta, ciò che ad Euclide decisamente non piaceva.

Anche su una sfera si possono tracciare linee che rappresentano il più breve percorso fra due punti. Se prendete un mappamondo (liscio) ed un elastico sottile, che possa scivolare sulla superficie, e poi con due dita tenete fermi sulla sfera i due estremi dell'elastico, vedrete che naturalmente l'elastico si dispone secondo il cammino più breve – che è unico: se allontanate l’elastico dal cammino che si è trovato, esso ci torna appena può, Quella è la vostra "retta sulla sfera". Per non far confusione con la retta che noi conosciamo dalle elementari, i matematici la chiamano "linea geodetica", un nome tradizionale che viene dalla geografia o meglio, dalla geodesia. Se poi guardate ancora meglio, vedete che la linea che unisce i due punti è un arco di cerchio massimo. Questo è evidente se fissate *un punto a un polo* ed un altro dove volete: l'elastico si disporrà lungo il meridiano che unisce il polo a quel punto.

Vedete quindi una cosa che molti non sanno: se dovete volare da Napoli a New York per la via più breve (per risparmiare kerosene), non dovete seguire il quarantunesimo parallelo su cui entrambe le città si trovano, più o meno, cioè il percorso arancione, ma un percorso diverso, quello azzurro (provate con l'elastico sul mappamondo).
Il percorso azzurro è parte di un cerchio massimo. Infatti, su una sfera gli equivalenti delle rette sono i cerchi massimi, che sono tutti egualmente lunghi e tutti si intersecano in due punti.

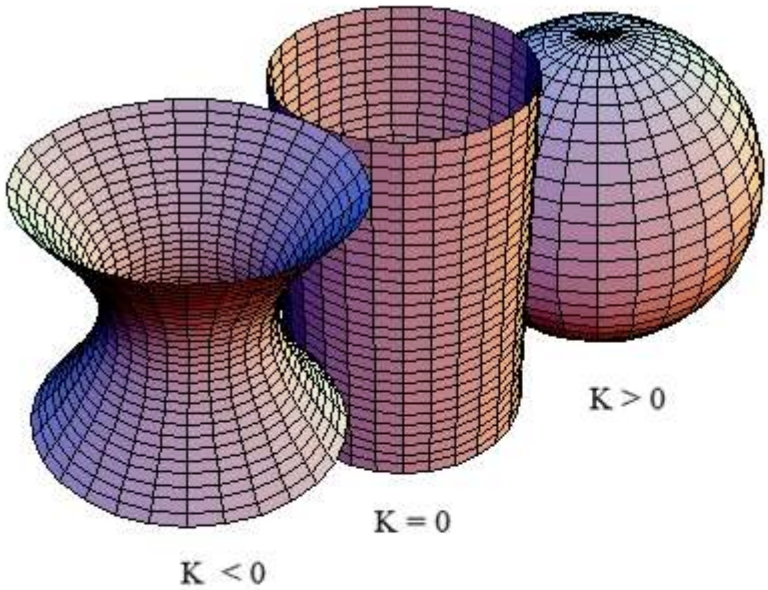


Per trovare la distanza tra due punti nello spazio (x_1, y_1), (x_2, y_2),(z_1,z_2), potrebbe dire qualcuno, dovremmo usare il teorema di Pitagora in tre dimensioni. Da cui:

$$d^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Questa distanza, che dovremmo percorrere bucando la sfera, è certo minore di quella misurata sull'arco di cerchio massimo. Per un esempio banale, si veda la distanza fra il Polo Nord ed il Polo Sud. Misurata sull'arco di meridiano è πR, ma misurata attraverso il centro della terra è 2R, che è più o meno 2/3 della precedente.
Per rendersi conto delle cose suggerirei di applicare la formula della distanza Euclidea al caso dei due poli, per esempio prendendo P_1 come Polo Nord e P_2 come Polo Sud, e dimostrare che la loro distanza è appunto 2R.
Torniamo alla geometria della superficie della sfera. Se tracciate una retta, cioè una geodetica per il cortile di casa vostra, la potete continuare fino a che tornate (quasi) infallibilmente a casa vostra. Dopo quanti chilometri? Sempre 40.000, in qualsiasi direzione tracciate la vostra geodetica (veramente non proprio - ma sono finezze che dipendono dal fatto che la Terra non è una sfera perfetta).

Gauss fece qui un'altra scoperta, che chiamò "Theorema egregium", denominazione sorprendente per un uomo cosi poco emotivo, in matematica, e soprattutto poco incline a lodare se stesso. Scoprì che le proprietà che stiamo studiando sono nella struttura della superficie, e si chiamano proprietà intrinseche. Non occorre cioè guardare la sfera dall'esterno. Esseri bidimensionali viventi sulla superficie della sfera misurando angoli e distanze e simili possono capire che la loro sfera non è un piano, *senza che nessuno di essi venga ammesso a guardare la superficie dall'esterno.*
Anche più importante, se noi prendiamo una superficie e la arrotoliamo, stendiamo eccetera, ma senza mai causare strappi e deformazioni, esiste una proprietà misurabile (che lui chiamò curvatura intrinseca ed i suoi successori chiamarono in suo onore "curvatura gaussiana") che rimane costante nonostante queste operazioni. Tale curvatura intrinseca è zero per un piano, positiva per una sfera e superficie affini, negativa per una sella. Il *teorema egregio* afferma specificamente che si può sviluppare una superficie su un'altra soltanto se le due superficie hanno la stessa curvatura intrinseca (K). Un piano può essere tranquillamente arrotolato su un cilindro, che ha pure curvatura zero, ma una sfera non può essere sviluppata su un piano (né su un cilindro), perché le curvature sono differenti (l'una positiva e l'altra nulla).



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Gaussian_curvature.JPG
By Jhausauer (Created with Mathematica 5.2) [Public domain], via Wikimedia Commons

Dunque il vecchio problema dei geografi, che volevano disegnare la superficie terrestre su di un piano, cioè proiettare una sfera su un piano senza tagli o deformazioni, il problema centrale delle carte geografiche, è insolubile. L'unica cosa che si può fare è limitare le deformazioni ed i tagli alle zone che ci interessano meno. In fondo i cartografi erano queste cimici intelligenti che scoprivano che la curvatura intrinseca della Terra (positiva) non era zero (curvatura intrinseca del piano).

Anche uno spazio in tre dimensioni come il nostro può avere una curvatura intrinseca che si sviluppa in quattro dimensioni, di cui noi non abbiamo percezione, ma che possiamo in qualche modo calcolare dalle proprietà intrinseche del nostro spazio in tre dimensioni, proprio come i nostri esseri bidimensionali viventi su una sfera possono calcolare le proprietà del loro spazio in due dimensioni, che si curva nella terza dimensione.

Ma per questi studi occorre un bagaglio matematico un po' più adeguato, di quello che io posso vendere in queste mie brevi considerazioni. Procurandovelo, viaggerete nel reame della geometria differenziale, lo strumento di cui si serve la relatività generale, la famosa teoria di Einstein.