

PACE E GUERRA

UN SEMPLICE MODELLO MATEMATICO,

E ALCUNI COMMENTI

(Il titolo di questo saggio viene naturalmente dal desiderio di non entrare in competizione con un libro più famoso e nell'insieme più interessante scritto in russo). Tutto nacque ad una certa colazione di ex-allievi di un Istituto torinese, ora defunto. Uno dei commensali mi si rivolse e mi chiese cortesemente se potevo aiutarlo a completare un certo suo saggio, procurandogli "una formuletta, un'equazioncina, un teoremino" che dimostrasse che la pace è sempre preferibile alla guerra. Questa, almeno, credo che fosse la richiesta, perché il richiedente non fu mai troppo chiaro nei suoi desiderata.

Lì per lì provai immediato rigetto all'idea. Non solo perché non avevo la minima idea su come aggredire il problema, ma anche perché ero convinto che una tale formula o teoremino non potesse esistere, e, anzi, se esisteva, era certamente sbagliato. Perché? Perché da millenni esistono guerre con profitto di un contendente (o coalizione di contendenti) e perdita dell'altra parte. Solo nei due ultimi conflitti mondiali si può dire che le cose siano andate come il mio interlocutore desiderava (danni disastrosi per entrambi i contendenti), ma penso che (i) i due ultimi conflitti siano uno solo, una sorta di seconda Guerra dei Trent'anni Europea, e (ii) una rondine non faccia primavera. Tuttavia non è escluso che le cose siano cambiate a tal punto da rendere effettivamente possibile trovare un modo di forzare sempre la soluzione pacifica.

In effetti la storia, soprattutto antica, è un'interminabile collana di guerre con vittorie e sconfitte e pochi pareggi. Come si può affermare che la guerra non convenga? Convienne (o conveniva) senz'altro a quello dei due contendenti che era più forte, o perché era più numeroso, o perché aveva armi più moderne, o perché aveva migliori comandanti, o per infiniti altri motivi. La guerra non conviene al più debole, questo è certo, e può comunque non piacere al più forte se ha qualche a farla. C'è quasi da dire che la guerra è fino ad oggi stata la normale situazione dell'umanità, e se non si è in uno stato continuo di guerra è perché un continuo guerreggiare alla fine stanca e, risultato forse più convincente, coalizza contro il vincitore tutti i vari sconfitti accumulati nel corso degli anni.

Ci furono anche i teorici della guerra che ritenevano che essa fosse una specie di "igiene" dell'umanità, una evoluzionistica "sopravvivenza del più adatto", con eliminazione degli inutili deboli, e rafforzamento dei forti, producendo così popoli "migliori", almeno sotto qualche punto di vista. Uhm.

Senza andare a questi estremi, non sono mancati in passato filosofi che hanno affermato che la guerra è il principale motore del progresso umano. In che modo il conflitto favorirebbe il progresso? Qui le risposte erano svariate e andavano dalla già citata eliminazione di razze ritenute inferiori e quindi costituzionalmente incapaci di contribuire al progresso (teoria discutibile), ai benefici effetti della ricerca tecnologica propiziata dalla guerra o dalla possibilità di una guerra (teoria quasi inoppugnabile).

Ma, mentre queste tesi filosofiche potevano essere controbattute con altri argomenti filosofici (a mio parere più deboli e più utopistici), si pensò che se si fosse potuto dare una trattazione matematica del soggetto, i risultati avrebbero potuto essere inoppugnabili. Già, ma quali risultati? Non occorre essere un grande matematico per comprendere che in un modello in cui una grande potenza ne sfida una piccola, è certo che la grande potenza ci guadagna in ogni caso, e se il modello matematico non ci dà questo risultato c'è da preoccuparsi seriamente sulla sua validità. Di fatto l'unica cosa che la piccola potenza può fare è minimizzare i suoi danni, accettando forme di protettorato o simili. E' un poco la storia del colonialismo, in cui rapidamente due potenze (Francia e Gran Bretagna) si divisero l'Africa a partire dalla metà del secolo XIX. Alla fine, però, il gioco non era più ristretto, ad esempio, allo scontro Francia-Egitto, o Gran Bretagna-Egitto, ma era allargato allo scontro Francia-Gran Bretagna, avente come posta l'Egitto, ma in cui l'Egitto non aveva voce in capitolo. A questo punto i rapporti di forze erano diversi ed altri paradigmi entrarono in gioco, tanto che dopo pochi decenni Francia e Gran Bretagna si trovarono ad essere immediatamente alleate fin dall'inizio della Prima Guerra Mondiale.

Ad ogni modo, come si vedrà, anche la matematica indica che una soluzione bellicosa è più consigliabile di una soluzione pacifica, ma al tempo stesso dà qualche indicazione sui rischi e le opportunità di una tale soluzione.

Intanto ci dobbiamo chiedere: “Quale teoria matematica permette queste conclusioni?” Attualmente lo strumento matematico di elezione per lo studio dei conflitti è la cosiddetta TEORIA DEI GIOCHI. Il nome non deve ingannare, perché da un lato indica un campo troppo ristretto, dall'altro troppo vasto. In generale, Von Neumann, che, come vedremo, fu in pratica il fondatore di una teoria sistematica dei giochi, definì “gioco” *una competizione tra un certo numero di giocatori, giocato per piacere o per interesse, secondo regole predeterminate, e deciso dall'abilità, dalla strategia, o dalla fortuna.* Se si riflette un istante, non penso che si sia lontani dal vero nel dire che non appena due o più “enti” (esseri umani, industrie, Stati ed enti di Stato, specie biologiche, coppie di coniugi, figli e genitori etc.) interagiscono, la loro relazione possa essere interpretata come un “gioco”, più o meno conscio, più o meno interessante, più o meno divertente, e quindi in certi casi, soprattutto quando c'è una competizione di qualche genere, come un conflitto. La Teoria dei Giochi modernamente è stata più limitatamente definita come “*lo studio di modelli*”

matematici di conflitto e cooperazione tra giocatori intelligenti e razionali” (R.B. Myerson, 1991). E’ oggi applicata in economia, scienza politica, psicologia, logica, informatica, biologia, e credo altro ancora. Quanto le entità biologiche possano essere definite intelligenti e razionali non lo so, ma tant’è, il Myerson la pensava così.

Questa definizione, però, ci spinge a scartare l’antenata della teoria dei giochi, la teoria dei giochi d’azzardo, che nel ‘600, nelle mani capaci di Pascal, Laplace ed altri, creò la teoria della Probabilità.

Non è questo il luogo per scrivere una storia, o preistoria della Teoria dei Giochi (si citano i nomi di Waldegrave (1713) e poi Madison, Cournot ed altri). Tutti questi autori ed altri ancora cercarono di studiare certi casi particolari di conflitti per mezzo della matematica, introducendo concetti che in seguito, da storici un po’ superficiali, furono attribuiti ai loro successori. Nuovi concetti comparvero nel 1913 con Ernst Zermelo, matematico illustre che si occupò in particolare del gioco degli scacchi.

A quel tempo penso esistesse ***una sola forma universalmente accettata di rappresentare lo schema di un gioco***, il cosiddetto “albero delle mosse”. Si elencano le “prime mosse possibili “ per il primo giocatore, poi , per ognuna di queste mosse, tutte le mosse possibili per il secondo giocatore, poi, per ognuna delle situazioni create dalle prime due mosse tutte le mosse possibili al primo giocatore eccetera. Si veda ad esempio l’albero del gioco Tic-Tac-Toe.

NOTA 1: ZERI E CROCI

Albero del gioco del “Tris” o Tic Tac Toe (prime due mosse).

Albero ingenuo:

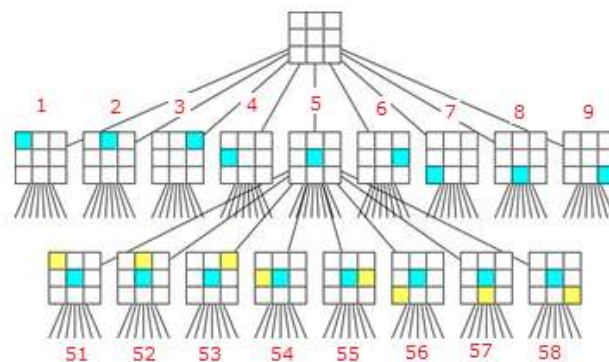


Fig.1

Albero intelligente.

In questo secondo albero si riconosce che il primo giocatore (azzurro) ha essenzialmente tre possibilità, non nove come

apparirebbe dall'albero ingenuo. In effetti molte prime mosse sono equivalenti

- 1) riflettendo la tavola intorno all'asse verticale
- 2) riflettendo la tavola intorno all'asse orizzontale
- 3) operando le due riflessioni.

Ne risulta un albero "ridotto":

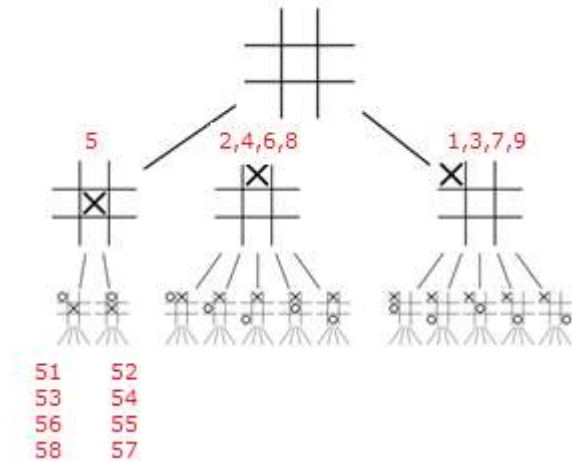


Fig.2

Quindi apparentemente il primo giocatore può fare nove mosse, una per casella. Ma in realtà non è vero. Usando le simmetrie della tavola di gioco, il primo giocatore ha solo tre possibilità, e le altre sei sono riducibili a queste. Similmente, le risposte ad una prima mossa in cui si sia occupata la casella centrale non sono otto, ma due.

In questa rappresentazione, una partita è un percorso in avanti lungo l'albero delle mosse.

Domanda "al brucio": in una partita di Tris, quante mosse faranno in tutto i due giocatori *al massimo*? Risposta: nove (cinque il primo giocatore, quattro il secondo). In effetti, dato che gli zeri e le croci non se ne vanno mai, la partita termina al più tardi quando tutti i posti sono occupati, il che avviene quando si sono collocate nove simboli, uno per casella (e uno per mossa).

L'albero delle mosse totale è dato in

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tic-tac-toe-full-game-tree-x-rational.jpg>

È facile scrivere un programma per computer che giochi perfettamente a Tris, o che enumeri le differenti posizioni (765, tenendo conto delle posizioni equivalenti per rotazione e riflessione; non tenendone conto sono 19683: si ricordi che in ogni casella possono stare tre simboli: Zero, Croce e Vuoto), o infine che enumeri le partite possibili, che sono 26839, e corrispondono ai vari modi possibili di percorrere l'albero (ovviamente sempre in avanti).

Naturalmente, il gioco degli scacchi, a cui Zermelo (appassionato cultore del gioco) rivolse la sua attenzione, è molto più complicato: la prima mossa può essere una di venti (avanzata di uno degli otto pedoni, di uno o due passi, salto di uno dei cavalli - due possibilità ciascuno).

Zermelo dimostrò un importante teorema (Zermelo-Kuhn) che applicato al gioco degli scacchi afferma: "*o il bianco vince forzando il nero a cedere, o il nero vince forzando il bianco a cedere, o entrambi i fronti possono costringersi almeno alla parità*".

NOTA 2. ZERMELO E GLI SCACCHI

Il giocatore di scacchi può anche non restare a bocca aperta davanti a questo teorema, e potrebbero venirgli in mente montagne che partoriscono topi, tanto più che esistono regole che mettono un limite (in tempo o in numero di mosse) ad una partita, dopodiché la partita è patta. Zermelo però considerava una partita potenzialmente con un infinito numero di mosse. A questo riguardo è interessante notare che, secondo un corollario del teorema, una partita di scacchi non può avere un numero infinito di mosse a meno di cadere in una situazione di scacco perpetuo o affine. Questo è più interessante, e la dimostrazione è semplice. In compenso il risultato è una pura curiosità, di cui non credo si sia mai potuta dare un'applicazione pratica. *Qual è il numero massimo di mosse di una partita, dall'inizio o da qualsiasi punto della medesima?* Risposta: si esamina quante sono le "configurazioni" possibili della scacchiera (questo lo si può calcolare, ad esempio *per la situazione iniziale*, con un po' di calcolo combinatorio immaginando che ognuna delle 64 caselle possa essere vuota o contenere un pedone o uno qualunque dei cinque pezzi possibili (di due colori ciascuno), e poi escludendo i casi con più di un Re bianco e un Re nero, più di nove Regine bianche e nove Regine Nere eccetera. Secondo Wikipedia si stima che il numero di combinazioni legalmente ammesse dei 32 pezzi sulle 64 case della scacchiera sia compreso fra 10^{43} e 10^{50} e la dimensione dell'albero delle mosse è approssimativamente di 10^{123} . Il numero di possibili diverse partite a scacchi è stimato essere circa 10^{5050} (*). Ora, per **una data partita** il numero delle mosse non può essere superiore al numero di configurazioni, altrimenti si ripassa necessariamente per una configurazione già vista. Chiaramente, se siamo in un finale di partita con due re e una torre, il numero di configurazioni è assai limitato, 3^{64} ($3 \cdot 10^{30}$), e così il numero massimo possibile di mosse. Inutile dire che un giocatore che impieghi tante mosse per vincere in questa situazione dovrebbe dedicarsi ad altri giochi dove sia più dotato.

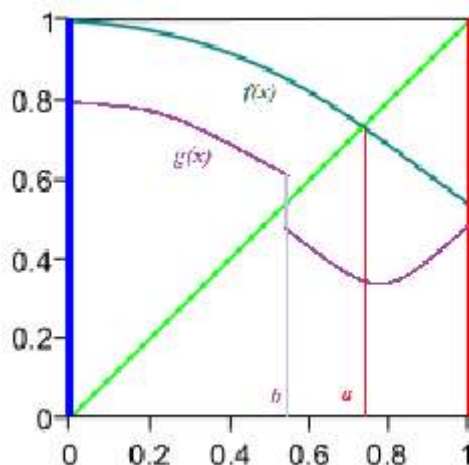
(*) il numero non è lontano da 1 seguito da 10^{85} zeri.
 Supponiamo di scriverlo su una strisciolina di carta, 1 mm per cifra. Il raggio dell'universo osservabile è circa 10^{68} mm. La strisciolina di carta dovrebbe quindi essere cento milioni di miliardi di millimetri più lunga...

Incidentalmente, Zermelo non è passato alla storia come un imbattibile giocatore di scacchi: sia chiaro che lo scopo della Teoria dei Giochi non è insegnare a giocare bene un determinato gioco. Ma con Zermelo la matematica incominciò a complicarsi e matematici sempre più illustri si occuparono del soggetto.

Zeuthen, Danese, dimostrò nel 1938 l'esistenza di una strategia vincente in una classe di modelli matematici di giochi, basandosi sul "teorema del punto fisso di Brouwer" (1910), che da allora entrò a far parte della teoria dei Giochi.

NOTA 3- IL TEOREMA DI BROUWER

Il teorema di Brouwer appartiene alla disciplina detta Topologia ed è intuitivo nel caso uni-dimensionale. In questo caso, il teorema afferma che **una funzione continua che "manda l'intervallo $[0,1]$ in sé stesso" deve avere un punto a per cui $f(a) = a$** . In effetti, come mostra il diagramma



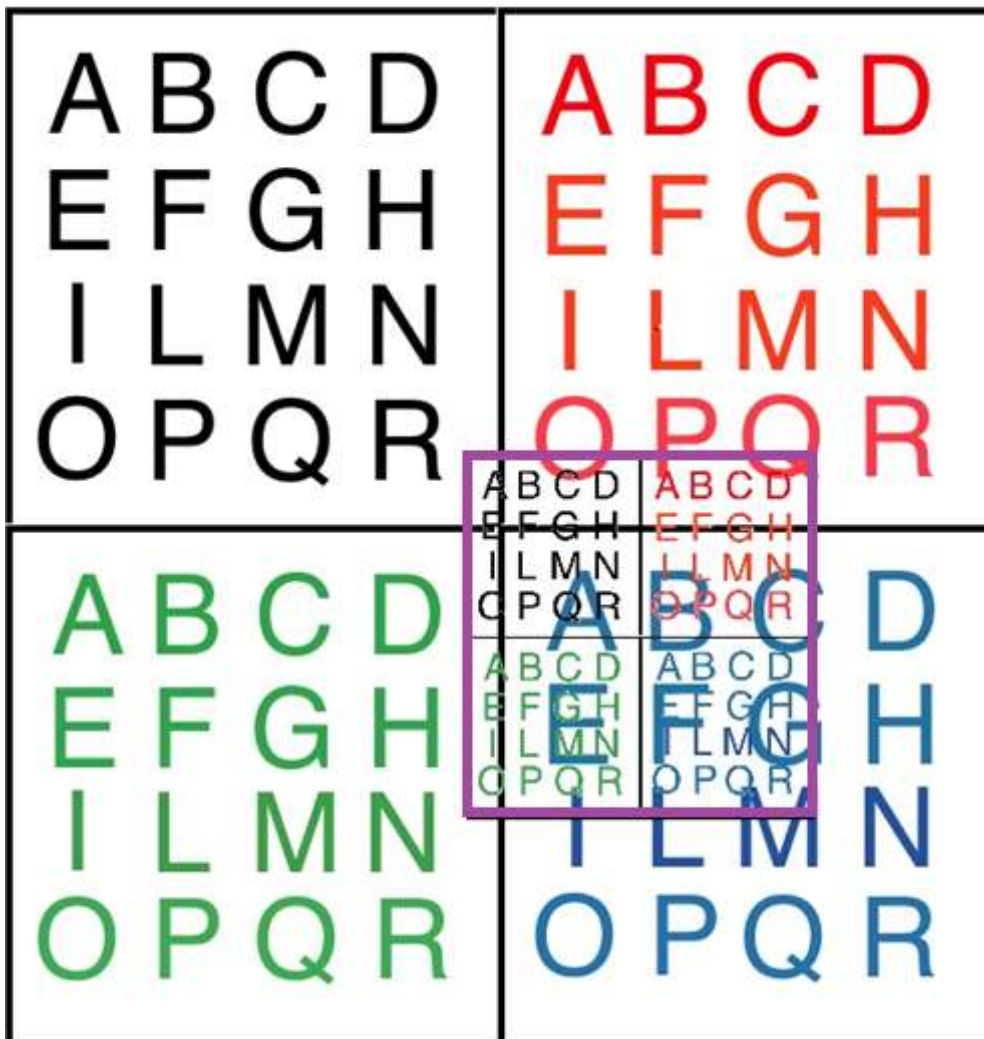
la funzione *continua* $f(x)$ tra 0 e 1 incrocia la diagonale, che altro non è che la funzione $X(x) = x$, nel punto $x = a$, e quindi $f(a) = a$.

La funzione $g(x)$, invece, è *discontinua* in b , e quindi non incrocia la diagonale $X(x)$.

La frase "manda l'intervallo $[0, 1]$ in se stesso" significa che ad un punto qualsiasi y dell'intervallo $[0,1]$ corrisponde un punto $f(y)$, quello che sta sulla sua verticale. Naturalmente gli estremi dell'intervallo tra 0 e 1 devono essere "coperti" dalla funzione $f(x)$, altrimenti potremmo immaginare delle funzioni che

iniziano nel punto $x=0$ e vanno da 0 a 1 stando sempre al di sotto della diagonale che quindi non incrociano mai, mentre la incrociano appunto in 0 se questo è compreso nel dominio di definizione della funzione.

In due dimensioni, nella sua versione più semplice, il teorema di Brouwer afferma che **nel piano euclideo ogni funzione continua su un disco chiuso possiede almeno un punto fisso** (cioè un punto (a,b) che usato come input nella funzione $f(x,y)$, dandoci $f(a,b)$, viene mandato su se stesso: $f(a,b) = (a,b)$). Il disco non è necessariamente un cerchio, ed il fatto che sia chiuso significa che il contorno del disco deve esser parte del dominio di definizione della funzione, così come nel caso unidimensionale dovevano esserlo gli estremi 0 e 1. Nel caso bidimensionale il teorema ha non intuitive applicazioni. Ad esempio, si supponga che il quadrato grande sia una città, per esempio Torino. Poi si prenda una mappa di Torino (quadrato porpora) grande quanto si vuole, la si stenda su un tavolo. Ci si convincerà con un po' di riflessione o per ispezione che c'è un punto della mappa esattamente al di sopra del punto che esso rappresenta, punto del tavolo stesso. Ciò resta vero se la mappa viene piegata o accartocciata.



In questo semplice, anche se non molto leggibile, esempio vediamo che il “punto fisso” è vicino alla stanghetta superiore della F blu, in basso a destra. Infatti tanto nella “realtà” (quadrato grande) quanto nella “mappa” (quadrato piccolo) le F blu sono quasi sovrapposte. Ispezione mostra che non ci sono altri punti fissi, anche se il teorema di Brouwer non dice che debba esserci un solo punto fisso. Si pensi ad esempio, nel caso unidimensionale, a funzioni che incrociano più volte la diagonale $X(x)$.

Inutile dire che il teorema può essere esteso a n dimensioni.

Ad ogni modo, la teoria dei Giochi quale la conosciamo arrivò piuttosto tardi, nel periodo fra le due guerre. Qui un altro conflitto stava avvenendo, un conflitto di interessi economici che aveva portato a decisioni sbagliate (non si chieda quali, non c'è accordo su questo punto) che a loro volta avevano portato alla grande crisi economica del 1929. Questa, a sua volta, aveva interrotto la schiarita politica della fine degli anni 20 ed aveva spostato vari equilibri politici nel modo catastrofico che portò alla Seconda Guerra Mondiale.

La comparsa dello strumento matematico d'elezione per l'analisi dei conflitti può esser fatta risalire al libro “*Teoria dei Giochi e del Comportamento Economico*” di Von Neumann e Morgenstern del 1944, che seguiva un articolo di Von Neumann del 1928. Penso che la teoria si riferisse da principio al *comportamento economico* perché ***i profitti del gioco sono in questo caso facilmente quantizzabili***, e si **suppone** che i giocatori mirino nel modo più ragionevole possibile al proprio massimo profitto economico, senza lasciarsi perturbare da altre considerazioni. Un altro vantaggio è che ***questo scopo è lo stesso per tutti*** (o quasi) i giocatori. ***L'assioma della razionalità***, per quanto ne so, vale ancora adesso. Resta inutile cioè, “giocare” con persone che si rifiutino di ragionare (e non sono poche). Da un punto di vista formale, i primi giochi che vennero analizzati appartenevano ad una classe particolare di **giochi, detti “a somma zero”**, in cui la somma delle vincite e delle perdite dei giocatori è zero. Se si tratta di due soli giocatori, l'uno vince quello che l'altro perde. Il fondamentale testo di Von Neumann contiene il metodo per trovare soluzioni mutualmente coerenti *limitatamente ai giochi a somma zero di due persone* (o riconducibili a questa categoria). Le “**soluzioni**” sono indicazioni delle “**coppie di strategie**” che i **due** giocatori devono adottare per raggiungere il loro scopo, o avvicinarsi il più possibile. Più avanti lo stesso Von Neumann dimostrò che un gioco non a somma zero con n giocatori può essere equiparato ad un gioco in cui si è aggiunto un fittizio giocatore (“il destino”), che pareggia i profitti e le perdite.

Strada facendo, Von Neumann introdusse varie innovazioni nella teoria. Qui ne citerò tre che mi paiono particolarmente importanti, soprattutto perché le utilizzeremo in seguito.

1) La rappresentazione di un gioco in forma normale.

E' necessario ora ricordare uno dei metodi più comuni per analizzare un gioco (ne esistono diversi), la cosiddetta "**forma normale**". Si tratta di costruire una tavola (o *matrice*) che nel caso di due giocatori avrà, per essere interessante, come minimo due righe e due colonne. Il giocatore Riga ha a disposizione due determinate strategie che danno il nome a ciascuna riga; il giocatore Colonna ha a sua disposizione due determinate strategie che danno il nome a ciascuna colonna.

TAVOLA DEI PROFITTI

	Giocatore Colonna, strategia A	Giocatore Colonna, strategia B
Giocatore Riga, strategia 1	<p>a = Profitto di Riga se gioca 1 e Colonna gioca A</p> <p>b = Profitto di Colonna se gioca A e Riga gioca 1</p>	<p>c = Profitto di Riga se gioca 1 e Colonna gioca B</p> <p>d = Profitto di Colonna se gioca B e Riga gioca 1</p>
Giocatore Riga, strategia 2	<p>e = Profitto di Riga se gioca 2 e Colonna gioca A</p> <p>f = Profitto di Colonna se gioca A e Riga gioca 2</p>	<p>g = Profitto di Riga se gioca 2 e Colonna gioca B</p> <p>h = Profitto di Colonna se gioca B e Riga gioca 2</p>

In ogni casella indicheremo il *payoff* o profitto per i due giocatori, se praticano le due strategie che si incrociano in quella casella. Per convenzione mettiamo a sinistra il payoff del giocatore Riga ed a destra il payoff del giocatore Colonna.

(In un gioco a somma zero, basterebbe indicare il payoff di uno solo dei due giocatori, per esempio – sempre – il giocatore Riga, perché, essendo il gioco a

somma zero, il payoff del giocatore Colonna sarebbe il negativo di quello del giocatore Riga).

E con questo abbiamo lo schema più generale possibile per due giocatori che dispongano di due strategie ciascuno. Un ulteriore vantaggio è che con questa rappresentazione “normale” si può dimostrare che giochi apparentemente assai diversi sono in realtà equivalenti.

Esempio di gioco a somma zero. Per non fare le cose troppo complicate diciamo subito che se due giocatori scommettono per esempio un euro sul vincitore di una partita di tennis, siccome in tennis il pari non esiste, alla fine della partita uno dei due scommettitori avrà vinto un euro e l'altro avrà perso un euro. Somma dei profitti = 0. Questa situazione (ciò che uno perde l'altro guadagna), che si verifica sempre nei giochi a somma zero, corrisponde a quello che i teorici dei giochi chiamano un **“ottimo di (Vilfredo) Pareto”** (illustre ingegnere italiano nato a Parigi perché il padre era in esilio, essendo stato mazziniano).

2) **il concetto di giochi non a somma zero.** In questo caso non è più vero che i profitti di un giocatore equivalgono alle perdite dell'altro. Supponiamo che ci siano due Paesi, uno che produce un eccesso di banane ed un paese ha un eccesso di mele. Entrambi ci guadagnano se il primo compra mele dal secondo e il secondo compra banane dal primo. Il commercio internazionale – nella sua forma elementare - è un gioco non a somma zero. *Queso ci dice che , con tutti i suoi difetti, il commercio internazionale può essere un guadagno per tutti, ed una situazione di totale autarchia una perdita per tutti.*

3) **Concetto delle strategie pure e delle strategie miste.**

Abbiamo visto giochi che essenzialmente si fanno una volta sola e si risolvono in una mossa. Tuttavia ci possono essere giochi che non hanno una strategia vincente e si ripetono più volte. Un caso che non esamineremo in dettaglio è quello di due società che possono scegliere di aprire un ristorante nella stessa zona della città che non ha abbastanza clienti per entrambi i ristoranti, e ripetono più volte questa scelta, eventualmente cambiando zona, ma sempre in condizioni analoghe. Le strategie sono due, aprire o non aprire. E' abbastanza chiaro che se una delle due società decide di aprire sempre, essa adotta una strategia pura. **E, in un caso così semplice, è chiaro che seguire una strategia pura permette all'avversario di indovinare le nostre mosse, ciò che in genere non ci conviene.** Ma se anche l'altra apre, entrambe le società ci perdono. Se uno dei giocatori decide di aprire sempre, parliamo di una **strategia pur** e l'altro giocatore non dovrebbe aprire mai. E' pura anche una strategia in cui si apre o non si apre alternativamente in sequenza fissa. Così facendo, *l'altro giocatore potrà scoprire più o meno facilmente* la strategia del primo giocatore e trarne vantaggio, per esempio lasciando che il primo giocatore esaurisca il suo budget disponibile nell'aprire in zone non redditizie e non abbia più modo di aprire in zone più redditizie. Oppure, le due aziende hanno un budget limitato

entrambe e devono cercare di aprire in zone dove l'altra azienda non apre. In ogni caso, l'unica opzione aperta ai due giocatori se entrambi vogliono guadagnare è quella di prendere la decisione di aprire o non aprire con un *metodo probabilistico*. Abbiamo così una *strategia mista*. Il primo problema è quello di calcolare la probabilità p con cui dobbiamo prendere la decisione, da cui segue la probabilità $(1-p)$ con cui dobbiamo prendere la decisione opposta – in modo, naturalmente, di guadagnarci. Il calcolo, in generale, può non essere semplicissimo, ma in un caso come quello appena accennato lo è.

Resta naturalmente il problema di produrre numeri a caso che ci suggeriranno volta a volta su cosa puntare. Per carità non si vada a naso, il quale, come si è provato, tende a seguire certe regolarità abbastanza facilmente individuabili. Bisogna in qualche modo usare un generatore di numeri casuali o pseudo-casuali. Usare l'ultima cifra di un orologio digitale che giunga ai centesimi di secondo o di un timer di solito è sufficiente.

Inutile dire che un gioco a **strategia pura** è un caso limite di gioco a strategia mista in cui $p = 1$ e $q = 0$, cioè viene sempre seguita la prima strategia.

I giochi sono ora classificati in vari modi e sono stati analizzati sotto svariati punti di vista. Particolare interesse presenta la questione se si possa dimostrare che in qualsiasi gioco esiste un **punto di equilibrio**, vale a dire una situazione che nessun giocatore abbia interesse a lasciare, cioè in cui nessun giocatore possa migliorare *in maniera unilaterale* il proprio profitto modificando la **sua** strategia. In altre parole, l'equilibrio si ha quando tutti i giocatori si sono convinti che la strategia di ciascuno risulta quanto meno nel minore dei mali ed è minimo il rischio che altri giocatori modifichino unilateralmente le loro singole strategie di gioco a loro vantaggio e svantaggio degli altri giocatori. Questo sarebbe già un buon risultato. Tuttavia la dimostrazione, che come vedremo per il caso più generale, è dovuta a John Nash, lascia aperte, come si dimostrerà nell'esempio più semplice possibile, altre possibilità anche più incoraggianti.

La prima formulazione di questo teorema, relativo alla nozione di equilibrio più famosa della teoria dei giochi per quel che riguarda i "**giochi non cooperativi**", apparve in un brevissimo articolo del 1950 di John Nash, allora dottorando a Princeton. *Non cooperativi* sono i giochi nei quali non c'è possibilità di formare coalizioni e ciascuno gioca per conto proprio, oppure si formano coalizioni, ma sono strettamente vincolanti e tutti i giocatori appartenenti ad una data coalizione devono giocare seguendo ruoli predeterminati nella comune strategia. Tuttavia, la teoria dei giochi non cooperativi può comprendere sotto talune ipotesi anche i giochi

cooperativi, mentre non è vero il contrario. L'unico problema sembra essere in pratica costituito dal fatto che la trasformazione di un modello di gioco cooperativo in un modello di gioco non cooperativo renderebbe quest'ultimo troppo complicato per una trattazione diretta, una volta che lo si voglia studiare in dettaglio.

L'articolo di Nash faceva anch'esso uso del teorema del punto fisso di Brouwer. Lo schema di una dimostrazione per un gioco di due giocatori, i quali hanno a disposizione due strategie miste ciascuno, che possono applicare con probabilità p_i e $(1-p_i)$ riposa sulla costruzione di un'ingegnosa funzione delle probabilità che i giocatori usino le due strategie a loro disponibili. La funzione accetta come input due valori di probabilità, uno per giocatore, e produce due nuovi valori di probabilità (rispettivamente p_1' e p_2') di uso delle strategie disponibili, **che migliorano il profitto dei due giocatori**. Chiaramente, se assegniamo alla strategia 1 del primo giocatore il valore P , alla strategia 2 dello stesso giocatore sarà automaticamente assegnata la probabilità $1-P$. Ne segue che in questo caso basta un numero per giocatore, due numeri in tutto.



Quando la funzione ci restituisce il valore delle probabilità di partenza, queste non possono più mutare, ovvero migliorare il profitto, e quindi abbiamo raggiunto un valore "di equilibrio" delle probabilità di uso delle strategie disponibili. Ma intanto, da un punto di vista matematico, ciò significa che siamo giunti ad un "punto fisso". Ma esiste questo punto fisso? Almeno un punto fisso esiste sempre, grazie al teorema di Brouwer.

Il contributo più importante dato da John Nash alla teoria dei giochi è la dimostrazione matematica dell'esistenza di questo equilibrio. In particolare egli ha dimostrato che ***ogni gioco finito ha almeno un "equilibrio di Nash"***, eventualmente in strategie miste. Per *gioco finito* si intende un gioco con un numero qualunque ma finito di giocatori e di strategie, e per *strategia mista* per un dato giocatore si intende che egli può scegliere tra diverse possibili strategie secondo una certa distribuzione di probabilità.

Vediamo di illustrare alcuni dei concetti con un semplice gioco, detto “Guerra e Pace”. In inglese il nome è “Peace War”, e se ne può trovare una breve analisi all’indirizzo https://en.wikipedia.org/wiki/Peace_war_game .

Il gioco “Guerra e Pace”, come vedremo subito, non ha somma zero).

Costruiamo ora la nostra matrice, con l’avvertenza che non è detto che la teoria dei giochi dia al primo colpo le risposte che speriamo. Il caso più semplice è quello di due stati, Riga e Colonna, che hanno risorse 2 (misurate in qualche unità comune) per ciascuno. Se intendono fare guerra devono impiegare metà delle loro risorse. Se Riga attacca Colonna, che non ha speso nulla in preparativi per la guerra, prende tutto ciò che ha Colonna (cioè 2), ma intanto Riga ha impiegato 1. Se invece Riga attacca Colonna che però è pronto come lui, la decisione di andare in guerra costa 1 ad entrambi. *In questo gioco non viene preso in considerazione l’esito della guerra* (esistono varianti del gioco in cui esso viene ripetuto più volte, e allora le regole devono tener conto di chi vince e di chi perde, quanto vince e quanto perde).

La “matrice dei payoff” è:

	Pace	Guerra
Pace	(2,2)	(0,3)
Guerra	(3,0)	(1,1)

Noto che si vede subito che il gioco non è a somma zero, perché le somme dei due payoff di ogni casella non danno sempre zero (in questo caso non lo danno mai).

Una strategia è qui definita dal nome della riga per il giocatore Riga e dal nome della colonna per il giocatore Colonna. Nel nostro semplice gioco una strategia è **dominante** se il payoff che essa provvede al giocatore quando l’avversario pratica qualsiasi strategia è superiore ai payoff che il giocatore può ottenere praticando qualsiasi strategia diversa dalla dominante. Il concetto può essere raffinato e si possono considerare strategie strettamente dominanti, debolmente dominanti eccetera, ma nel nostro caso non è necessario, perché vediamo subito che entrambi i giocatori hanno una strategia dominante, cioè Guerra, e la casella Guerra/Guerra è all’incrocio delle due strategie dominanti. Inoltre è un punto di equilibrio, perché se Riga resta in Guerra, e Colonna passa a Pace, Riga arriva a un payoff = 3. Similmente, se Riga passa alla riga Pace, Colonna guadagna 3. Quindi ad entrambi i Paesi conviene stare su Guerra/Guerra, e chi se ne allontana perde.

Nel gioco Guerra e Pace c’è un’altra casella interessante, in cui entrambi i giocatori guadagnerebbero di più, cioè la Pace/Pace. Ma, come vediamo, se Riga mantiene Pace e Colonna passa a Guerra, Colonna guadagna 3; similmente, se Colonna resta a Pace, e Riga passa a Guerra, Riga guadagna 3. Non si tratta dunque di un punto di equilibrio, perché entrambi i giocatori sono incoraggiati a muoversi dalla casella Pace/Pace, sperando che l’opponente vi rimanga.

IL DILEMMA DEL PRIGIONIERO

Chi è già stato esposto alla teoria dei Giochi noterà che la matrice è approssimativamente la stessa che compare nel famoso “dilemma del prigioniero”, che fu originariamente formulato intorno al 1950 da Merrill Flood ed Elvin Dasher, che a quel tempo lavoravano alla RAND corporation. Il problema fu analizzato in dettaglio nel 1992 da Albert W. Tucker.

(si veda, ad esempio:

https://it.wikipedia.org/wiki/Dilemma_del_prigioniero)

Brevemente, se i due complici (interrogati separatamente) confessano entrambi, si prendono sei anni (bonus di un anno per aver confessato); se uno confessa e l'altro no, quello che confessa va libero e l'altro si prende il massimo, sette anni. Infine, se nessuno dei due confessa, si prendono un anno ciascuno per reati minori.

	confessa	non confessa
confessa	-6,-6	0,-7
non confessa	-7,0	-1,-1

Qui si vede che le due strategie dominanti (confessa per entrambi) portano ad un equilibrio di Nash, lontano dall'essere soddisfacente se paragonato al punto (-1,-1).

Il punto di equilibrio di Nash, in questo semplice caso, è subito trovato, ed è la casella Guerra/Guerra. A prima vista questo risultato potrebbe sembrare un disastro per la nostra tesi, che la pace sia più profittevole della guerra, ma la stessa tabella ci suggerisce qualcosa. *Entrambi i paesi guadagnerebbero di più nella casella Pace/Pace, (Ottimo di Pareto)* se sapessero che nessuno dei due può o vuole passare a Guerra. E come? L'obiettivo sarebbe raggiunto se esistesse un arbitro superiore (una divinità o una superpotenza che colpisce chi manca al suo impegno) o, più semplicemente un'autorità collettiva, una “Organizzazione delle Nazioni” che sanzionasse chi va in guerra facendogli perdere di più di quanto potrebbe guadagnare vincendola. In questo caso vediamo che il ricavo di chi va in guerra contro un avversario pacifico sarebbe 3, perché otterrebbe le risorse dell'avversario, sommate a metà delle proprie. Se poi l'avversario, attaccato, fosse costretto ad entrare in guerra, il ricavo, in caso di vittoria, sarebbe 2, cioè le risorse di partenza. Occorre dunque che l'autorità superiore possa, con opportune sanzioni, far perdere più di 1 all'aggressore.

Nel caso del dilemma del prigioniero (in realtà due prigionieri), nel quale i due prigionieri finirebbero col confessare, beccandosi sei anni di galera ciascuno, mentre se stessero zitti ne prenderebbero solo uno ciascuno, l'autorità superiore

potrebbe essere un boss mafioso che fa sapere ad entrambi che se non escono col minimo della pena vuol dire che o uno o entrambi hanno parlato e lui provvederà affinché tacciano per sempre. Un tale argomento è in genere convincente.

Questo modello (il più semplice possibile) ci indica forse come nacque la Società delle Nazioni, anche se a quei tempi la teoria dei Giochi, come tale, non esisteva ancora. Similmente, nell'impotenza delle Nazioni Unite, si vede come molte guerre siano state evitate o limitate tra il 1945 e il 1990 in quanto non l'ONU, ma una delle due Superpotenze si assumeva o cercava di assumere un ruolo di arbitro fra i propri satelliti, e dirimeva i loro possibili conflitti (un caso classico fu la crisi di Suez del 1956, in cui gli USA intervennero contro i propri alleati, Francia e Gran Bretagna – facendo naturalmente un fiasco colossale sotto il profilo delle loro alleanze).

Esaminando la Guerra Fredda in retrospettiva, si vede che *obtorto collo*, tanto i satelliti russi quanto quelli americani ci guadagnarono da questa situazione. Alcuni di voi ricorderanno che invece un grosso gruppo di Paesi non accettò di allinearsi né con l'Unione Sovietica né con gli Stati Uniti. Non ci guadagnarono per nulla: incominciarono le guerre civili (in cui le due superpotenze misero inevitabilmente le mani) e, peggio ancora, le “guerre tra i poveri”.

MOVIMENTO DEI PAESI NON ALLINEATI

Membri principali furono l'India, l'Egitto, il Brasile e, per un certo periodo, la Cina.

Dopo una prima conferenza tenutasi a Bandung (1955), il primo vertice si tenne a Belgrado nel 1961, con la partecipazione di 25 membri, che dichiararono la loro opposizione a colonialismo, imperialismo, e neocolonialismo. Il vertice successivo si tenne al Cairo nel 1964, tra 46 nazioni, molte delle quali erano stati africani che avevano appena raggiunto l'indipendenza; tra gli argomenti principali di discussione ci fu il conflitto arabo-israeliano. Il vertice del 1969 a Lusaka fu uno dei più importanti, con la realizzazione di una struttura permanente su temi economici e politici.

Ma il sistema aveva tre problemi:

- 1) diversi stati non riuscirono ad evitare guerre civili,
- 2) ...da cui risultarono inframmettenze delle due maggiori superpotenze (ciò che era prevedibile)
- 3)...ed una serie di “guerre fra i poveri”, stermini, lotte fra Paesi fratelli.

- *Guerre tra poveri (l'Etiopia che stermina gli eritrei e combatte la Somalia),*
- *stermini (l'Indonesia che occupa l'isola di Timor e fa scempio di decine di migliaia di abitanti),*
- *lotte tra paesi fratelli o socialisti (l'India contro il Pakistan, il Pakistan contro il Bangladesh, la Cina contro l'India, il Vietnam contro la Cina, la Cambogia*

contro il Vietnam, la Libia contro il Ciad, la Giordania contro l'OLP, il Kenya contro l'Uganda, l'Iraq contro l'Iran...) misero in seria difficoltà i Non Allineati.

Naturalmente la domanda principale è come mai USA e URSS non entrarono in guerra in questi quarantacinque anni, pur essendo sempre valida anche per loro due la conclusione che il caso Guerra-Guerra era il punto di equilibrio di Nash. In certo senso possiamo dire che una “superiore autorità”, la “Ragione” si prese il compito di arrestare le velleità aggressive dei due contendenti. E qui dovremmo ammettere che fu una fortuna che il primo Paese ad avere armi nucleari furono gli Stati Uniti e non, per esempio la Cina, che, penso, difficilmente avrebbe resistito alla tentazione di attaccare per prima. Sono note infatti le reazioni cinesi a quella che esse considerarono una “capitolazione” quando i missili sovietici furono ritirati da Cuba nel 1962, per non parlare delle reazioni di Castro che, inizialmente contrario ad accettare i missili sovietici, si dichiarò pronto ad usare armi nucleari tattiche in caso di invasione, pur sapendo che con questo Cuba sarebbe stata annientata. Può darsi che si sia trattato di frasi di propaganda, ma possono anche essere state osservazioni sincere, che amplificavano lo stato d'animo dei grandi rivoluzionari, che valga la pena distruggere metà del mondo per fare un mondo perfetto (dalle rovine di quello che resta).

Il gioco di USA e Russia era dunque diverso :

		URSS	
		Attesa	Attacco nucleare
USA	Attesa	Stallo nucleare	USA distrutti / URSS vince
	Attacco nucleare	URSS distrutta/ USA vince	(MAD- distruzione assicurata di entrambi)

L'attacco *simultaneo* porterebbe i due avversari a distruggersi, o, quanto meno, a distruggere le installazioni nucleari di entrambi, certamente con enormi perdite. Questo è il “punto di Nash”, ma vediamo subito che qualcosa non funziona: non c'è nessuna soddisfazione ad avere entrambi i Paesi distrutti, in particolare, incluso il proprio, e non è neanche necessario che sia distrutto del tutto. Dubito che un Presidente Americano si sarebbe vantato di aver distrutto l'Unione Sovietica, se in compenso avesse perso Washington, New York e Los Angeles. Ne risulta che *chi attacca per primo vince*, ma solo se riesce a distruggere tutte le basi di lancio dell'avversario, in modo che questi non possa immediatamente contrattaccare.

Ma se ciascun contendente riesce

1) a vedere immediatamente il lancio missili balistici intercontinentali;

2) a rendere impossibile la distruzione di tutte le proprie basi in un primo attacco (per esempio rendendole mobili e disperdendole sulla superficie terrestre), e quindi riesce a rispondere con la (quasi) totale distruzione dell'aggressore, si giunge al caso della "Mutually Assured Destruction", mutuamente assicurata distruzione, o MAD, in pratica equivalente al caso in cui entrambi i contendenti attaccano simultaneamente. Il progressivo perfezionarsi delle armi di entrambi i Paesi, in grado di assicurare una distruttiva risposta (**avvistamento da satellite e sommergibili nucleari**, che, per chi non ci aveva pensato, acquistano così una loro logica evidente), sembra essere ciò che ha salvato il mondo da una guerra nucleare nei 45 anni di coesistenza più o meno minacciosa delle due superpotenze, e la Ragione sembra esser stata la "superiore autorità" che ha fermato i due contendenti sull'orlo di una guerra nucleare.

Ma la Ragione, è stata l'unica ad agire?

Il problema è che questo logico ragionamento, nella sua semplicità non tiene conto delle possibilità di errore, cioè che **per errore umano o malfunzione tecnica** il contendente Due si possa convincere che il contendente Uno ha scatenato un attacco nucleare per primo. Di qui la risposta e la MAD.

A quanto pare, l'errore avvenne almeno quattro (!) volte nel corso della Guerra Fredda e in tutti i casi sarebbe stata la parte Sovietica (in particolare i compagni **Vasili Arkhipov** (27 ottobre 1962) e **Stanislav Petrov** (26 settembre 1983 - Incidentalmente, il film Wargames uscì il 28 ottobre 1983) a rifiutarsi di credere all'evidenza erronea, evitando così la temuta "escalation", a cui gli Americani in almeno due casi stavano portando il mondo con ottuso entusiasmo, ed avendo già dato per perduti, se ne fosse stato il caso, i loro alleati, tra cui l'Italia.

Ancora nel 1983 (7-11 Novembre) un'**esercitazione NATO, "Able Archer 83"**, fu talmente realistica da far credere che un attacco nucleare fosse imminente. I sovietici attesero, pronti al contrattacco, ma l'esercitazione terminò con sollievo generale. Non sembra che sul momento la NATO si fosse accorta di quanto, per la sua ricerca di realismo, stesse per succedere. Ultimo, per quanto io sappia, fu il caso del **missile scientifico Norvegese Black Brant XII (1995, cioè già nell'era post-URSS)**, in cui entrambi i sistemi di contrattacco USA e URSS furono attivati, ma fortunatamente il razzo finì in mare come, dove e quando previsto, prima che si passasse all'azione. In questi due ultimi casi evidentemente la freddezza prevalse sul nervosismo, di nuovo in Russia, nonostante Yeltsin avesse già la fatale chiavetta inserita per dare il fatale ordine.

Ma evidentemente, se noi conosciamo con certezza quattro grossi rischi corsi dall'umanità, possiamo immaginare che di rischi altrettanto gravi ce ne furono di più, forse assai di più, coperti dal segreto militare. Ad esempio, nel 2015 la stampa giapponese rivelò un caso simile in cui, per ragioni rimaste ignote, **gli americani stavano per lanciare dalle loro basi giapponesi quattro missili nucleari, proprio al**

tempo della crisi di Cuba (28 ottobre 1962) . I missili non furono lanciati perché l'ufficiale addetto al lancio avrebbe notato che uno solo dei missili aveva come obiettivo l'Unione Sovietica.

Quale “superiore autorità” salvò il mondo quattro o cinque o più volte? Il caso?

Chiaramente, è meglio raggiungere una situazione nella quale questi errori non possono succedere, e tutti ottengono il miglior risultato possibile anche se esso non è un punto di equilibrio: ciò è possibile, ma a condizione che si instauri una cooperazione tra i giocatori, vale a dire che tutti agiscano non col fine di ottenere il miglior risultato per sé, ma di ottenere il miglior risultato per il gruppo, e quindi, indirettamente, ottenendo un risultato migliore anche per sé .

Tuttavia, qui sorge un altro problema: l'assioma di razionalità può fare cilecca, non per errore umano o tecnico, ma nel senso che spesso la razionalità collettiva porta ad obiettivi diversi da quella individuale. Nella maggior parte dei casi è dunque necessario un accordo vincolante tra i giocatori (e quindi una istituzione che vigili su tale accordo) ed un sistema di sanzioni nei confronti di chi non lo rispetta, riducendo quindi il profitto del singolo se esso si allontana dalla combinazione di strategie che garantisce a tutti il miglior risultato, affinché nessuno trovi preferibile defezionare.

Dunque la teoria dei Giochi, grazie anche al fondamentale contributo di John Nash (che tra l'altro è il personaggio principale del film “*A beautiful mind*” di Ron Howard, 2001, mettendo però a fuoco altri aspetti della sua vita), ci dice anzitutto che nella maggior parte dei casi si può raggiungere un equilibrio stabile, in cui, giocando razionalmente, tutti i partecipanti al gioco limitano i loro danni, con strategie abbandonando le quali peggiorano la propria situazione. Ma in più ci viene detto che frequentemente esistono punti di non equilibrio, nel senso che se un giocatore cambiasse la propria strategia potrebbe migliorare il proprio profitto a scapito degli altri, ma tali che tutti i giocatori potrebbero ulteriormente migliorare il loro payoff purché stiano ai patti. Poiché il punto non è di equilibrio stabile occorre che i giocatori cooperino, o per amore o per forza. Questa indicazione non è banale, ed è già stata empiricamente trovata. Ma non è trascurabile.

Il conflitto è stato per secoli il motore dominante del progresso. Se è pur vero che progresso vi è stato, è altrettanto vero che i conflitti hanno generato ogni sorta di effetti indesiderabili (altri conflitti, odio fra le nazioni, lutti, miseria, fame, etc.). La teoria dei Giochi afferma che il progresso potrebbe anche avvenire creando una istituzione abbastanza forte da essere in grado di dirimere i conflitti, generando così condivisione e comunità. Questa istituzione o altre sue figlie potrebbero proporre eventualmente grandi obiettivi di comune interesse che possono soltanto essere raggiunti in collaborazione. Alcune istituzioni scientifiche europee (CERN, ESA, ESO) dimostrano che questo è possibile: si sono fatte scoperte fondamentali

(come il Bosone di Higgs) in particelle elementari, si sono lanciate missioni spaziali, si è costruito il miglior telescopio ottico dell'emisfero meridionale, tutte realizzazioni irraggiungibili per la maggior parte dei paesi membri, se avessero operato isolatamente. La conquista dello spazio potrebbe essere un altro di questi obiettivi (anche se io non ci credo molto). Penso invece che alla fine l'obiettivo di vivere tutti insieme meglio sulla Terra possa effettivamente rivelarsi un obiettivo di comune interesse, da ricercarsi insieme.

Nondimeno, il problema non è così semplice, e questo risultato teorico elementare, pur confortato dai risultati conseguiti da alcune istituzioni scientifiche "regionali", è ben lontano dal permetterci di credere in una sua prossima generalizzazione ad altri campi ed a tutte le nazioni.