DIALOGO PRIMO DI NEWTON ED UN AMICO

(Con un po' di formalismo, ma solo per coloro a cui piace - Parte I).

Ad alcuni piace provare ad estendere le formule destinate a numeri fino ai limiti del possibile, magari anche ad oggetti che non sono numeri, per vedere che cosa ne vien fuori. Molte scoperte matematiche sono state fatte in questo modo. Se voi siete in questa categoria di esploratori, questo capitolo vi può interessare.

Incominciamo col calcolare $(a+b)^4$.
Questi non è altro che (a+b)(a+b)(a+b)(a+b), esattamente come a^4 non è altro che a·a·a·a. In pratica possiamo incominciare a fare $(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$, che poi moltiplichiamo per se stesso eccetera. Ma procediamo in un altro modo, usando la testa.

Il risultato di (a+b)(a+b)(a+b)a+b) sarà la somma di prodotti di potenze di a e b, ciascuna moltiplicata per un coefficiente, cioè un numero, che ci dice quante volte il prodotto si presenta. Ad esempio, a^4 si può presentare una volta sola, quando cioè in tutte le parentesi, dette "binomi", (a+b), noi scegliamo la *a*.
Invece il prodotto a^3b si presenterà tutte le volte che sceglieremo *a* in tre parentesi e *b* in una. Ma questo lo possiamo fare 4 volte, cioè possiamo scegliere *a* nella prima, seconda, terza parentesi (e *b* nella quarta), oppure oppure *a* nelle 1,2,4 o nelle 1,3,4, o nelle 2,3,4 – e *b* nella restante parentesi (Questo ragionamento dovrebbe incominciare a ricordarci qualcosa).
In quanto al prodotto a^2b^2 lo troviamo tutte le volte che scegliamo *a* in due parentesi su quattro.
E poi avremo ab^3 quando sceglieremo *b* in tre parentesi e *a* in una e infine b^4, quando avremo scelto *b* in tutte le 4 parentesi.
Il coefficiente di a^2 (che bisognerà moltiplicare per b^2 , perché la somma degli esponenti deve essere 4: non possiamo saltare parentesi) è quindi il numero di modi in cui noi possiamo formare squadre di elementi presi da due parentesi su un totale di 4 parentesi (o due giocatori da un gruppo di quattro giocatori). E queste o questi sappiamo che sono

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

E quindi abbiamo:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}\,a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

con i coefficienti che costituiscono appunto la quarta riga del triangolo di Pascal. E da questo si capisce il perché del nome dei vari coefficienti: si chiamano **coefficienti binomiali:** perché entrano nelle potenze del binomio.

Vedete come sono costruiti i coefficienti: *4* è l'esponente del nostro binomio, che per il momento è un numero intero. Nei "coefficienti binomiali" 4 è sempre al piano superiore. In quello inferiore ci stanno i numeri da zero a *4*, che sono in tutto *5*, dato che c'è anche lo zero. Ogni coefficiente binomiale moltiplica un prodotto di potenze dei due termini del binomio, in cui la somma degli esponenti è 4, e uno dei due varia da zero a 4, l'altro da 4 a zero.
Se invece di voler fare $(a+b)^4$ vogliamo $(a+b)^n$, applicando questo metodo senza far troppe domande troviamo un'espressione di n+1 termini, ciascuno costituito da un coefficiente binomiale in cui n sta

al piano superiore, mentre al piano inferiore abbiamo i numeri da 0 a n. Ogni coefficiente moltiplica un prodotto di potenze di a e b, in cui la somma degli esponenti vale sempre n, e l'esponente di b varia da 0 a *n*, mentre quello di a varia da *n* a 0.
Possiamo quindi scrivere subito e con comodo calcolare potenze alquanto complicate come $(a+b)^{10} = a^{10} + 10\, a^9 b + 45\, a^8 b^2$ eccetera, leggendo i coefficienti direttamente dalla decima riga del triangolo di T/P.

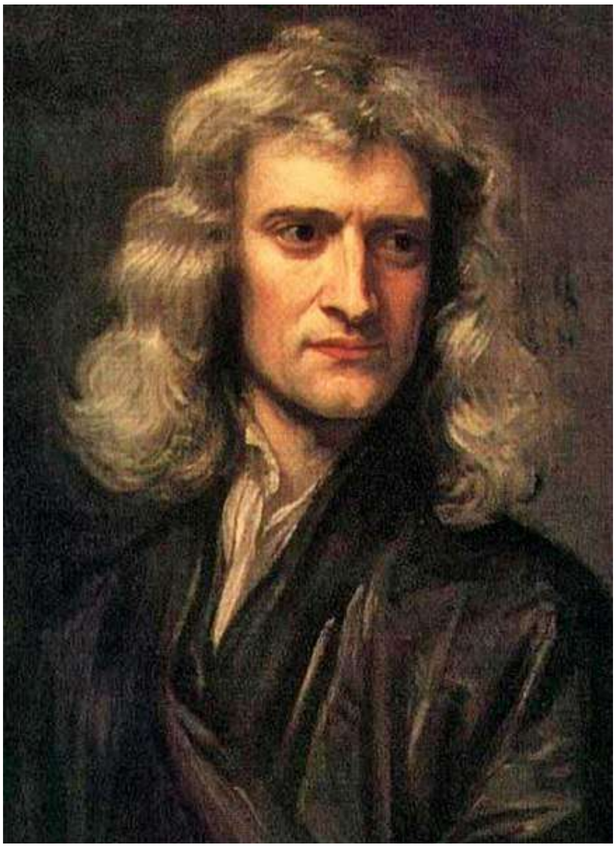
La formula per $(a + b)^4$ è talmente simmetrica che coloro i quali hanno un po' di disposizione per il formalismo non troveranno strana la sua estensione alla potenza n, che si scrive:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

Se poi a = 1, le cose vanno ancora meglio, perché una delle variabili – mettiamo che sia *a* - scompare, siccome tutte le potenze di 1 sono eguali ad 1. Avremmo quindi:

$$(1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2} b^2 + \binom{n}{3} b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

Fin qui tutto bene.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
after Godfrey Kneller [Public domain], via Wikimedia Commons

Ma un giorno, verso il 1665, Isaac Newton si disse*:*

- *E se mi occorresse il valore di un binomio con un esponente n non intero?*

- *E per che diavolo? Gli chiese un amico.*

- *Non so, disse Newton, metti che mi occorra √(1+x), che potrei scrivere come $(1+x)^{1/2}$. Difatti $(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} = (1+x)$.*

- *Bene, rispose l'amico che era un impaziente, allora ti attacchi al tram.*

- *I tram non ci sono ancora. E poi, col fischio, che mi attacco, rispose Isacco.*

- *Ma la vuoi capire, gli disse l'amico, che i coefficienti binomiali valgono solo per numeri n interi?*

- *Allora estendiamo il concetto, rispose Isacco.*

L'amico era un impaziente e gli disse:

- *Estendi, estendi, poi vieni a riferire.*

Ma Newton era un genio, e di lì a poco era già di ritorno. Disse:

- *Hai notato il caso che abbiamo visto l'altro giorno?*

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!}$$

- *Tutti lo sanno, disse l'amico.*

- *Ma hai notato che il primo rapporto*

$$\frac{6!}{3!}$$

è solo un espediente per scrivere 6 x 5 x 4, cioè 6×(6-1)×(6-2)? Vai a vedere se non ci credi.

L'amico andò a vedere e disse: *Già.*

- *E quindi, disse Isacco, se n non è un numero intero come 6, ma, per esempio, ½, noi possiamo pur sempre scrivere:*

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}$$

- *E come sappiamo che ci dobbiamo fermare ad (1/2-2)?* chiese l'amico che non capiva dove ci si sarebbe potuti fermare.

- *Mah, non so, disse Isacco. Dopo tutto, questo coefficiente moltiplica una potenza di x con esponente intero che vale 3. Se abbiamo la prima potenza di x ci fermiamo al primo termine, se abbiamo la seconda potenza ci fermiamo al secondo (e poi nota che, per ricordarcelo, di sotto abbiamo 2!) E via di seguito. Dobbiamo avere tanti fattori quanti l'esponente intero, e quanti ne ha il fattoriale a denominatore. Ho idea che usando le derivate, su cui sto lavorando, si possa dare una ragione. Per esempio potresti scrivere* $\sqrt{(1+x)} = a + b x + c x^2$ *e poi...*

- *Senti, disse l'amico, non mi far girare la testa. Accontentiamoci per adesso di un metodo che funziona, anche se non sappiamo perché.*

- *Come vuoi.*

- *Già,* disse l'amico. *Ma con n intero avevamo un bel polinomio di grado n. E con n non intero? Non vedi che non avremo mai un termine come* $\binom{n}{n}$ *per chiudere il polinomio?*

- *E chi ha detto che dobbiamo chiudere il polinomio? Noi continuiamo fino all'infinito. Non avrai mica paura dell'infinito? Semplicemente, prima avevamo*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

che finiva da qualche parte quando n-k diventava zero. Adesso invece abbiamo:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$$

e non facciamo l'ultimo passo, perché se r non è intero, noi non sappiamo che significhi r!. O pensi che dovremmo estendere il concetto di n! a numeri non interi? Ho idea che si possa fare, ma non ci occorre. E' un poco un ritorno alle origini.

- *Secondo me è una scemenza, disse l'amico.*

- *Il cuore mi dice che funziona, rispose Isacco. Ho deciso di chiamare SERIE questi polinomi che vanno all'infinito.*

- *Ma se vanno all'infinito avranno un valore infinito, pigolò l'amico. Per esempio x^{100} deve avere un valore enorme.*

- *Ma sei proprio un asino, gli disse affettuosamente Isacco. E' vero che se un numero è maggiore di 1, anche di poco, le sue potenze successive daranno dei numeri crescenti, fino all'infinito. Ma se il numero è minore di 1, anche di poco,le sue potenze successive saranno sempre più piccole, e andranno verso zero. Pensa a 0.5, al quadrato è 0.25, al quadrato è 0.0625.Tanto per dire, 0.5^{100} sarà praticamente zero. Vedi quel che dico?*

- *Senti, gli disse l'amico, la tua mamma vorrebbe che tu ti dedicassi all'agricoltura. Perché non ci fai un pensierino?*

Non si conosce la risposta di Isacco, se non dal fatto che l'amico andò in giro per qualche giorno con un occhio nero. Ma aveva ragione Isacco.

E quindi:

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} \ldots$$

Cioè, per r=1/2:

$(1 + x)^{1/2} = 1 + ½ x – 1/8 x^2$ …..

Ma da dove viene quel " -1/8"?. Naturalmente il trucco è quello. Se riuscite da soli avete capito, altrimenti no.

Ad ogni modo, per r =1/2

$$\frac{r(r-1)}{2!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$$

E il termine successivo?

E il banale $(1-x)^{-1}$, a che cosa sarà eguale?
Applicare la formula senza paura:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-1-1)}{2}(-x)^2 + \left(\frac{(-1)(-1-1)(-1-1-1)}{6}\right)(-x)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

Modo complicato di ottenere una serie semplice, che giàconosciamo e ritroveremo in futuro.

Qui qualcuno vorrà lanciare la spugna. Lo può fare benissimo. Quello che sto scrivendo ora non è essenziale per il seguito.
Ma come? C'è un seguito? Non è ancora finita?

(Continua)

NOTA 1: Perché dovrebbe essere utile calcolare $(1+x)^{1/2}$ o $(1-x)^{1/2}$, la cui serie differisce dalla precedente solo perché qualche termine ha segno meno?
Per esempio il problema di calcolare $\sqrt{23}$ ricade in questo caso. Possiamo scrivere 23 = 25-2 = 25(1-2/25).
Quindi $\sqrt{23} = \sqrt{25}\,(1-0.08)^{1/2} = 5(1-0.04...) = 5 - 0.2\ldots = 4.8$. Potete provare a calcolare il prossimo termine. Tenendone conto si ottiene $\sqrt{23} = 4.796$. Il risultato, come sappiamo, è 4.79583.

NOTA 2: E' inutile dire che a suo tempo arrivò anche chi estese il concetto di n! a numeri n non interi. Era il solito Eulero, e la generalizzazione di n! ha un nome celebre: si chiama "Gamma (Γ) di Eulero".