

“LEGGE DEI GRANDI NUMERI “ E “RITARDI”.

Storia di una pessima relazione

1. La legge dei grandi numeri : frequenza e probabilità.

Come è noto, la **frequenza** di un evento è un dato empirico. Si lancia una moneta vera cento volte e si vede che, per esempio, Testa esce 46 volte, Croce 54. Facendo il rapporto con il numero di lanci (100), si ottiene la frequenza di Teste (0.46) e di Croci (0.54) *per quella serie di lanci*. La **probabilità**, invece, è un concetto matematico che viene calcolato a priori, *una volta per tutte*: dato un insieme di eventi che possono verificarsi con egual probabilità (quindi equiprobabili), la probabilità è il rapporto tra il numero di eventi favorevoli e quello totale. La definizione è un po' come un gatto che cerca di prendersi la coda, in quanto gli eventi devono essere equiprobabili, il che presume che si sappia che cos'è proprio quella probabilità che tentiamo di definire, ma intanto rende l'idea.

Nel caso della monetina, abbiamo due possibili eventi, che supponiamo equiprobabili, Testa o Croce. La probabilità di ottenere Testa con un lancio è data dal rapporto fra il numero di eventi favorevoli (1) ed il numero totale (2). Quindi, per una monetina, le probabilità sono 0.5 per Testa e 0.5 per Croce. Questa probabilità, **che è fissata una volta per tutte dal gioco a cui giochiamo**, è altra cosa dalla frequenza che abbiamo appena osservata, la quale assai probabilmente sarà diversa se lanceremo la monetina altre cento volte. Inoltre, la probabilità è un concetto matematico, a cui si applicano teoremi e dimostrazioni inoppugnabili.

Ora, la legge dei grandi numeri o legge empirica del caso afferma che:

All'aumentare del numero delle prove fatte il valore della frequenza tende al valore teorico della probabilità.

Questa è solo una di tante formulazioni, che non è quella originale, ma almeno è abbastanza chiara. Non si voglia far dire a questa legge cruciale di più di quello che dice. Nel caso delle nostre monetine (e dei dadi e della roulette) dice soltanto che “il rapporto fra il numero di risultati favorevoli e il numero di tentativi, per un numero infinito di tentativi, tende a diventare eguale al rapporto fra il numero di eventi favorevoli possibili ed il numero totale di eventi possibili (numero noto fin da principio una volta per tutte)”. Il primo rapporto menzionato può essere il rapporto fra **9853 Croci e 20000 tentativi (= 0.493)**, mentre la probabilità è il rapporto (numero degli eventi favorevoli =1 / (numero totale di eventi possibili) =2), cioè 0.5, sempre 0.5. La Legge ci dice che passando a due milioni di casi, i due rapporti dovrebbero avere valori assai più vicini che non 0.493 e 0.5, che sono già vicini.

Per questa legge esistono dimostrazioni, che però richiedono che la “convergenza al limite” sia definita in modo diverso dall'usuale definizione dell'analisi matematica. Si parla piuttosto di “convergenza in probabilità” o “convergenza quasi certa”. Comunque la legge è ragionevole ed è confermata, oltre che da innumeri simulazioni, dall'esperienza di mille casi assai più complicati del lancio di una monetina.

Una volta che accettiamo questa parentela fra probabilità e frequenza, che è quanto meno un fatto empirico, **allora possiamo servirci di tutto l'armamentario del calcolo delle probabilità**, che è un esteso ramo della matematica, per capire come mai, lanciando cento volte una moneta non

truccata, dovremmo fare Testa circa cinquanta volte, per quanto ogni lancio sia indipendente e ogni volta la probabilità di far Testa valga $\frac{1}{2}$. Come fa la monetina a uscire ogni volta casualmente Testa o Croce, ma in modo che miracolosamente dopo cento lanci ci siano una cinquantina di teste ed altrettante croci? Ripeto, il miracolo è il legame tra frequenza e probabilità. Accettato questo fatto empirico, la teoria della probabilità ci spiegherà come mai tendano ad esserci tante teste quante croci, e ci fornirà altre nozioni utili. Ora però vorrei concentrarmi su una questione a mio parere più urgente, cioè il malaugurato (preteso) legame fra la legge dei grandi numeri e i cosiddetti “ritardi”.

2. I tre elementi nel gioco della roulette

Supponiamo di fissarci su un caso specifico: una roulette classica, con uno zero, niente *partage* o *en prison*. E supponiamo di giocare sul rosso o sul nero. In questo caso ad ogni lancio, la probabilità che esca il colore rosso è $\frac{18}{37}$, quella che esca il nero è eguale, $\frac{18}{37}$; quella che esca lo zero è $\frac{1}{37}$.

In questo tipo di gioco ci sono tre elementi importanti.

1) **La media.** Abbiamo due tipi di media, una osservata, che corrisponde alla frequenza, empirica, ed una teorica, che è una **probabilità**, e vale sempre $\frac{18}{37}$ per i Rossi, altrettanto per i Neri e $\frac{1}{37}$ per gli Zeri, indipendentemente da N, numero dei lanci. Viceversa, la media empirica è data dal rapporto fra i casi favorevoli osservati e il numero N di tentativi fatto. La legge dei grandi numeri è quella che ci spinge a giocare, nella certezza che la media osservata su un certo numero di lanci al crescere di N sia sempre più vicina ai valori indicati, ma sempre più vicina nel senso che

$$\frac{\text{media empirica o frequenza}}{\text{probabilità teorica}} \rightarrow 1$$

O anche, e meglio per il discorso che segue:

$$\text{media empirica} - \text{probabilità teorica} \rightarrow 0$$

Quello che la legge non dice, però, è che se risaliamo ai dati bruti, allora $N \times$ (media empirica) al crescere di N debba essere sempre più vicino ad $N \times$ (probabilità). Cioè, la legge non dice affatto che:

$$\begin{aligned} & (\text{Numero di risultati osservati} - \text{numero di risultati attesi}) \\ & = N(\text{media empirica} - \text{probabilità}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Sembra paradossale, ma è così. **Sarebbe evidentemente vero** se N fosse costante, da cui discenderebbe che i numeri di eventi verificatisi e i numeri di eventi attesi matematicamente dovrebbero eguagliarsi in qualche magico modo, per N tendente ad infinito, **e quindi avrebbero ragione i sostenitori delle teorie dei ritardi**. I loro oppositori, che hanno ragione, potrebbero solo rifugiarsi nell'affermazione che i numeri devono essere “grandi”, ben al di là del numero di tentativi che un uomo può fare nella sua vita. Il fatto è che c'è una spiegazione più semplice: le differenze

$$N(\text{media empirica} - \text{probabilità})$$

tra le frequenze osservate ed il valore teorico (probabilità moltiplicate per numero di lanci), che chiameremo **scarti**, non tendono affatto a zero, **perché la decrescente differenza fra le medie calcolate ed empiriche viene amplificata moltiplicandola per N – che cresce per definizione - in modo da rendere crescenti gli scarti**. Quindi non c'è nessuna legge matematica che ci assicura che

il numero di Neri da un certo punto in poi dovrà essere eguale al numero di Rossi per un grandissimo numero di lanci della roulette.

2) **Le fluttuazioni.** I nostri guadagni e le nostre perdite non sono le differenze fra le medie, che sarebbero dei numeri decimali sempre più piccoli, ma sono i prodotti delle differenze fra le medie **moltiplicati per N**, cioè proprio questi scarti, che hanno il vizio di crescere con N. Le fluttuazioni, per noi, sono in pratica gli **scarti**. Se le fluttuazioni non esistessero (e non esistesse lo Zero), si vincerebbe sempre esattamente quel che si perderebbe (quindi, giocando accortamente, si vincerebbe al massimo un'unità), vale a dire, le case da gioco non esisterebbero e gli *aficionados* della roulette diventerebbero *aficionados* di qualcos'altro.

Per calcolare il valore delle fluttuazioni, bisogna però, o fare delle simulazioni, o utilizzare l'armamentario di matematica che la legge dei grandi numeri ci permette di usare. Il calcolo non è semplicissimo, ma il risultato è noto e, come vedremo, è confermato dalle simulazioni. Il risultato si incarna nella "deviazione standard" σ (radice quadrata della "varianza") che ha un suo risultato teorico. Nel caso in esame, puntando sul Rosso o sul Nero, esso vale approssimativamente

$$\sigma \cong \frac{1}{2}\sqrt{N}$$

La teoria delle probabilità prevede che circa 95% (19 su 20) dei risultati, cioè delle frequenze osservate, cada nell'intervallo di **due deviazioni standard** intorno alla media. (Formule approssimate e un po' più complicate ci diranno che 99.994% dei risultati cada entro tre deviazioni standard dalla media, lasciandone fuori meno di uno su diecimila). In altre parole ci sono due aspetti da considerare:

I) Aspetto predittivo: Se noi giochiamo N volte un'unità su una scelta binaria con probabilità p, senza mai cambiare l'ammontare della puntata, possiamo aspettarci di centrare il risultato nel novantacinque per cento dei casi secondo la formula:

$$(\text{Numero successi entro } \dots) = Np \pm \sqrt{N}$$

In altre parole, giocando mille volte con probabilità circa $\frac{1}{2}$ (Rosso e Nero senza Zero) potremmo anche centrare il risultato, se siamo mediamente fortunati, circa 530 volte (ove 30 è all'incirca la radice quadrata di 1000), con una vincita netta di 2×30 unità (le altre vincite si compenserebbero con le perdite).

II) Aspetto qualitativo: le fluttuazioni o scarti non tendono affatto a Zero, ma aumentano al crescere di N, precisamente in media crescono proporzionalmente alla radice quadrata di N. **Questo è il siluro principale alla teoria dei ritardi:** se dopo N lanci ci troviamo con un numero di risultati avversi superiori alla media, non è affatto detto che dopo altri N lanci si debbano recuperare le perdite. Può succedere, ma non è garantito dalla Legge dei Grandi Numeri, che di questo non si occupa. Noi sappiamo solo che gli scarti hanno maggior spazio per aumentare al crescere di N. *Questo, pochi lo sanno e immaginano che quanto più alto sia il numero di lanci, tanto minori debbano essere gli scarti, e quindi quanto maggiore è il ritardo, tanto più probabile è che si presenti il risultato ritardatario: no, NO,*

NO

La legge dei grandi numeri si occupa delle differenze tra medie osservate e medie attese, non di queste differenze moltiplicate per N. Le prime tendono a zero, le seconde (gli scarti) invece no.

Vediamo le probabilità di vincita per un giocatore che punti costantemente 1 gettone sul nero. Ho scelto come numero di giocate sei multipli di 37, cioè 37, 370, 3700, 37000, 370000, 3700000. Con questo trucco, la probabilità che esca il Nero (o anche il Rosso) produce i valori è 18, 180 etc. fino a 180000, la probabilità che esca lo zero dovrebbe produrne 1, 10, 100, 1000 e via dicendo, come si vede dalla tabella che segue.

	37 giocate per serie	370 per serie	3700 per serie	37000 per serie	370000 per serie	3700000 per serie
Neri attesi	18	180	1800	18000	180000	1800000
Rossi attesi	18	180	1800	18000	180000	1800000
Zeri attesi	1	10	100	1000	10000	100000
Deviazione standard	3.04	9.61	30.4	96.1	304	961

Attenzione all'ultima riga: *in cauda venenum*.

Tutti sappiamo che queste *probabilità*, cifre ideali, non si presentano quasi mai. Nella realtà osserveremo *frequenze*, in cui ci sarà quasi sempre qualche Rosso in più o in meno della media, qualche Zero in più o in meno, qualche Nero in più o in meno.

Ma quanti? La risposta è che nel 95% dei casi avremo tanti Neri quanti la media più o meno un valore entro il doppio della deviazione standard. Quindi, guardando la nostra tabella, vediamo che per 37 giocate dovremmo ottenere nel 95% dei casi un numero di neri entro 18 più o meno 6, quindi tra 12 e 24 neri (in cifra tonda). Invece, come mostreremo in appendice, per 3700000 giocate avremo tra 1798000 e 1802000 Neri (in cifra tonda).

Se facciamo il rapporto tra questi estremi e la media, troviamo che

- Per 37 giocate, il 95% dei risultati sarà compreso fra 0.667 e 1.333 volte la media,
- per 3700000 giocate 95% dei risultati sarà tra 0.9989 e 1.0011 volte la media.

Vediamo quindi che il 95% dei risultati sarà percentualmente sempre più vicino alla media, e per un numero infinito di tentativi, il 95% dei risultati sarà tra 1 e 1 volte la media. In altre parole avremmo un numero di rossi e di neri eguale. Delle volte si sente dire che ciò avviene "passando al limite", ma è un passaggio al limite molto sui generis, che farebbe inorridire i grandi matematici del primo Ottocento, quelli, appunto che definirono il concetto di limite.

Sfortunatamente è solo all'infinito che avremo questo risultato: all'infinito nessuno ci è stato e nessuno ne è tornato.

Prima dell'infinito, cioè nel campo del numero di giocate che l'umanità potrà mai fare in milioni di anni, mentre il 95% dei risultati sarà *percentualmente* sempre più vicino al risultato atteso, in genere se ne discosterà sempre più in valore assoluto, come la tabella mostra. Cioè la Legge dei Grandi Numeri ***non ci dà alcuna garanzia che le vincite successive compensino le perdite iniziali***. Può succedere, anzi, in genere aspettando abbastanza succede, ma in linea di principio si possono dare dei casi in cui lo scarto si allontani sempre di più dalla media senza peraltro violare la Legge dei Grandi Numeri.

E' vero, tutto questo? Lo si può provare sia con un po' di matematica (superflua in questa sede), sia con delle simulazioni.

Ho fatto sei gruppi di simulazioni di dieci serie di queste giocate alla Roulette e li ho riportati in Appendice. Date un'occhiata e vedrete:

- 1) che se si guarda alle differenze “Neri meno media” o “Rossi meno media”, ne risulta che in qualche raro caso si è un po’ fuori dalle due deviazioni standard. Ciò avviene in tre casi: serie 8 del gruppo I, serie 5 del gruppo 4, serie 5 del gruppo VI. Non è probabile. Ma, come diceva Enrico Fermi, i casi poco probabili hanno la pessima abitudine di verificarsi subito e con pertinacia (e questo lo sanno per amara esperienza molti giocatori d’azzardo);
- 2) che in tutte le sessanta serie il nero vince (poco) 6 volte, di cui tre nel gruppo I, l’ultima nella 7ª serie di 3700 puntate. Il rosso vince cinque volte nel gruppo I;
- 3) che la vincita media del Nero per puntata, a partire dalla serie 7 di 3700 puntate è sempre negativa, cioè è una perdita, e si avvicina gradualmente al fatidico numero 0.027027, cioè 1/37, la tasa media da pagare.

Il risultato netto è che il giocatore ha ragionevoli speranze di vincere fino a che 2 deviazioni standard ($\cong \sqrt{N}$) sono inferiori al numero medio previsto di zeri, che è $N/37$.

Cioè, grossolanamente, le speranze si estinguono quando $N > 37^2$ ovvero $N > 1369$. Tanta precisione fa ridere i polli, diciamo 1500 tanto perché non si sloghino il becco. Il punto è che passati i 1500 tentativi, per vincere qualcosa bisogna riuscire ad infilare una di quelle serie che si presentano una volta su venti. Non è impossibile, ma non è neanche tanto facile. Ma i comuni mortali di lì in avanti devono aspettarsi di perdere pressoché sempre.

Dalle simulazioni, come già notato, si vede che in tutto il Nero prevale sei volte, l’ultima delle quali nella serie 7 del gruppo III di 3700 puntate. Un calcolo ad occhio ci dice che questo dovrebbe succedere meno di una volta su diecimila, e noi ci siamo riusciti in dieci tentativi....scherzi delle probabilità.

Quello che le tavole non dicono, è *quante volte il numero di Rossi sia stato pari al numero dei Neri* prima di concludere la serie: può esserlo stato anche molte volte o mai, ma alla fine si vede che lo scarto del risultato tende a crescere pur restando approssimativamente entro la radice quadrata di N.

Un’ulteriore indicazione su come funziona il gioco può essere trovata nell’APPENDICE I, “Una figura val più di mille parole” nel post “ROULETTE” in questo stesso sito:

<https://dainoequinoziale.github.io/resources/scienze/matematica/ROULETTE.pdf>

APPENDICE

Circa quaranta milioni di simulazioni Rosso (R), Nero (N) - e Zero (Z).

Lettura:

Per ogni gruppo: medie di Rossi, Neri e Zeri attese; deviazione standard.

Per ogni serie M di n tentativi:

Serie M: numero di neri (N), Rossi (R), Zeri (Z);

Rapporto frequenzeN/probabilità: viene calcolato per i Neri, quindi è dato da $N/(n \cdot 18/37)$;

DifferenzaN-Probabilità: calcolata per il Nero, $N - n \cdot 18/37$

DifferenzaR-Probabilità: calcolata per il Rosso, $R - n \cdot 18/37$

Guadagno del Nero su n giocate, dato $N-R-Z$

Per giocata: $(N-R-Z)/n$

I. DIECI SERIE DI 37 GIOCATE CIASCUNA

Media (N &R) = 18; Media Z= 1; Deviazione standard = 3.04027

Serie I.1: 16 N, 20 R, 1 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.888889

DifferenzaN-Probabilità = -2, DifferenzaR-Probabilità = 2

Guadagno del nero su 37 giocate: -5; Per giocata: -0.135135

Serie I.2: 16 N, 19 R, 2 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.888889

DifferenzaN-Probabilità = -2, DifferenzaR-Probabilità = 1

Guadagno del nero su 37 giocate: -5; Per giocata: -0.135135

Serie I.3: 15 N, 21 R, 1 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.833333

DifferenzaN-Probabilità = -3, DifferenzaR-Probabilità = 3

Guadagno del nero su 37 giocate: -7; Per giocata: -0.189189

Serie I.4: 16 N, 21 R, 0 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.888889

DifferenzaN-Probabilità = -2, DifferenzaR-Probabilità = 3

Guadagno del nero su 37 giocate: -5; Per giocata: -0.135135

Serie I.5: 23 N, 14 R, 0 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.277778

DifferenzaN-Probabilità = 5, DifferenzaR-Probabilità = -4

Guadagno del nero su 37 giocate: 9; Per giocata: 0.243243

Serie I.6: 17 N, 18 R, 2 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.944444

DifferenzaN-Probabilità = -1, DifferenzaR-Probabilità = 0

Guadagno del nero su 37 giocate: -3; Per giocata: -0.081081

Serie I.7: 19 N, 15 R, 3 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.055556

DifferenzaN-Probabilità = 1, DifferenzaR-Probabilità = -3

Guadagno del nero su 37 giocate: 1; Per giocata: 0.027027

Serie I.8: 12 N, 25 R, 0 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.666667

DifferenzaN-Probabilità = -6, DifferenzaR-Probabilità = 7

Guadagno del nero su 37 giocate: -13; Per giocata: -0.351351

Serie I.9: 22 N, 14 R, 1 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.222222

DifferenzaN-Probabilità = 4, DifferenzaR-Probabilità = -4

Guadagno del nero su 37 giocate: 7; Per giocata: 0.189189

Serie I.10: 14 N, 22 R, 1 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.777778
DifferenzaN-Probabilità = -4, DifferenzaR-Probabilità = 4
Guadagno del nero su 37 giocate: -9; Per giocata: -0.243243

II. DIECI SERIE DI 370 GIOCATE CIASCUNA

Media (N &R) = 180; Media Z= 10; Deviazione standard = 9.614179

Serie II.1: 173 N, 182 R, 15 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.961111
DifferenzaN-Probabilità = -7, DifferenzaR-Probabilità = 2
Guadagno del nero su 370 giocate: -24; Per giocata: -0.064865

Serie II.2: 176 N, 182 R, 12 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.977778
DifferenzaN-Probabilità = -4, DifferenzaR-Probabilità = 2
Guadagno del nero su 370 giocate: -18; Per giocata: -0.048649

Serie II.3: 162 N, 193 R, 15 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.9
DifferenzaN-Probabilità = -18, DifferenzaR-Probabilità = 13
Guadagno del nero su 370 giocate: -46; Per giocata: -0.124324

Serie II.4: 194 N, 165 R, 11 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.077778
DifferenzaN-Probabilità = 14, DifferenzaR-Probabilità = -15
Guadagno del nero su 370 giocate: 18; Per giocata: 0.048649

Serie II.5: 165 N, 194 R, 11 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.916667
DifferenzaN-Probabilità = -15, DifferenzaR-Probabilità = 14
Guadagno del nero su 370 giocate: -40; Per giocata: -0.108108

Serie II.6: 187 N, 170 R, 13 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.038889
DifferenzaN-Probabilità = 7, DifferenzaR-Probabilità = -10
Guadagno del nero su 370 giocate: 4; Per giocata: 0.010811

Serie II.7: 181 N, 181 R, 8 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.005556
DifferenzaN-Probabilità = 1, DifferenzaR-Probabilità = 1
Guadagno del nero su 370 giocate: -8; Per giocata: -0.021622

Serie II.8: 166 N, 190 R, 14 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.922222
DifferenzaN-Probabilità = -14, DifferenzaR-Probabilità = 10
Guadagno del nero su 370 giocate: -38; Per giocata: -0.102703

Serie II.9: 182 N, 179 R, 9 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.011111

DifferenzaN-Probabilità = 2, DifferenzaR-Probabilità = -1
Guadagno del nero su 370 giocate: -6; Per giocata: -0.016216

Serie II.10: 173 N, 180 R, 17 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.961111
DifferenzaN-Probabilità = -7, DifferenzaR-Probabilità = 0
Guadagno del nero su 370 giocate: -24; Per giocata: -0.064865

III. DIECI SERIE DI 3700 GIOCATE CIASCUNA

Media (N &R) = 1800; Media Z= 100; Deviazione standard = 30.402703

Serie III.1: 1768 N, 1820 R, 112 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.982222
DifferenzaN-Probabilità = -32, DifferenzaR-Probabilità = 20
Guadagno del nero su 3700 giocate: -164; Per giocata: -0.044324

Serie III.2: 1803 N, 1807 R, 90 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.001667
DifferenzaN-Probabilità = 3, DifferenzaR-Probabilità = 7
Guadagno del nero su 3700 giocate: -94; Per giocata: -0.025405

Serie III.3: 1756 N, 1827 R, 117 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.975556
DifferenzaN-Probabilità = -44, DifferenzaR-Probabilità = 27
Guadagno del nero su 3700 giocate: -188; Per giocata: -0.050811

Serie III.4: 1799 N, 1804 R, 97 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999444
DifferenzaN-Probabilità = -1, DifferenzaR-Probabilità = 4
Guadagno del nero su 3700 giocate: -102; Per giocata: -0.027568

Serie III.5: 1762 N, 1841 R, 97 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.978889
DifferenzaN-Probabilità = -38, DifferenzaR-Probabilità = 41
Guadagno del nero su 3700 giocate: -176; Per giocata: -0.047568

Serie III.6: 1767 N, 1847 R, 86 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.981667
DifferenzaN-Probabilità = -33, DifferenzaR-Probabilità = 47
Guadagno del nero su 3700 giocate: -166; Per giocata: -0.044865

Serie III.7: 1851 N, 1756 R, 93 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.028333
DifferenzaN-Probabilità = 51, DifferenzaR-Probabilità = -44
Guadagno del nero su 3700 giocate: 2; Per giocata: 0.000541

Serie III.8: 1826 N, 1762 R, 112 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.014444
DifferenzaN-Probabilità = 26, DifferenzaR-Probabilità = -38

Guadagno del nero su 3700 giocate: -48; Per giocata: -0.012973

Serie III.9: 1812 N, 1777 R, 111 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.006667

DifferenzaN-Probabilità = 12, DifferenzaR-Probabilità = -23

Guadagno del nero su 3700 giocate: -76; Per giocata: -0.020541

Serie III.10: 1777 N, 1824 R, 99 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.987222

DifferenzaN-Probabilità = -23, DifferenzaR-Probabilità = 24

Guadagno del nero su 3700 giocate: -146; Per giocata: -0.039459

IV. DIECI SERIE DI 37000 GIOCATE CIASCUNA

Media (N & R) = 18000; Media Z= 1000; Deviazione standard = 96.141787

Serie IV.1: 17974 N, 17997 R, 1029 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.998556

DifferenzaN-Probabilità = -26, DifferenzaR-Probabilità = -3

Guadagno del nero su 37000 giocate: -1052; Per giocata: -0.028432

Serie IV.2: 17933 N, 18067 R, 1000 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.996278

DifferenzaN-Probabilità = -67, DifferenzaR-Probabilità = 67

Guadagno del nero su 37000 giocate: -1134; Per giocata: -0.030649

Serie IV.3: 18057 N, 17930 R, 1013 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.003167

DifferenzaN-Probabilità = 57, DifferenzaR-Probabilità = -70

Guadagno del nero su 37000 giocate: -886; Per giocata: -0.023946

Serie IV.4: 18023 N, 17988 R, 989 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.001278

DifferenzaN-Probabilità = 23, DifferenzaR-Probabilità = -12

Guadagno del nero su 37000 giocate: -954; Per giocata: -0.025784

Serie IV.5: 18034 N, 17972 R, 994 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.001889

DifferenzaN-Probabilità = 34, DifferenzaR-Probabilità = -28

Guadagno del nero su 37000 giocate: -932; Per giocata: -0.025189

Serie IV.6: 18232 N, 17769 R, 999 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.012889

DifferenzaN-Probabilità = 232, DifferenzaR-Probabilità = -231

Guadagno del nero su 37000 giocate: -536; Per giocata: -0.014486

Serie IV.7: 17962 N, 18026 R, 1012 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.997889

DifferenzaN-Probabilità = -38, DifferenzaR-Probabilità = 26

Guadagno del nero su 37000 giocate: -1076; Per giocata: -0.029081

Serie IV.8: 18037 N, 17892 R, 1071 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.002056
DifferenzaN-Probabilità = 37, DifferenzaR-Probabilità = -108
Guadagno del nero su 37000 giocate: -926; Per giocata: -0.025027

Serie IV.9: 17966 N, 18084 R, 950 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.998111
DifferenzaN-Probabilità = -34, DifferenzaR-Probabilità = 84
Guadagno del nero su 37000 giocate: -1068; Per giocata: -0.028865

Serie IV.10: 17888 N, 18117 R, 995 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.993778
DifferenzaN-Probabilità = -112, DifferenzaR-Probabilità = 117
Guadagno del nero su 37000 giocate: -1224; Per giocata: -0.033081

V. DIECI SERIE DI 370000 GIOCATE CIASCUNA

Media (N &R) = 180000; Media Z= 10000; Deviazione standard = 304.027026

Serie V.1: 180136 N, 179895 R, 9969 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000756
DifferenzaN-Probabilità = 136, DifferenzaR-Probabilità = -105
Guadagno del nero su 370000 giocate: -9728; Per giocata: -0.026292

Serie V.2: 180187 N, 179699 R, 10114 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.001039
DifferenzaN-Probabilità = 187, DifferenzaR-Probabilità = -301
Guadagno del nero su 370000 giocate: -9626; Per giocata: -0.026016

Serie V.3: 180173 N, 179841 R, 9986 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000961
DifferenzaN-Probabilità = 173, DifferenzaR-Probabilità = -159
Guadagno del nero su 370000 giocate: -9654; Per giocata: -0.026092

Serie V.4: 180584 N, 179451 R, 9965 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.003244
DifferenzaN-Probabilità = 584, DifferenzaR-Probabilità = -549
Guadagno del nero su 370000 giocate: -8832; Per giocata: -0.02387

Serie V.5: 179988 N, 179915 R, 10097 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999933
DifferenzaN-Probabilità = -12, DifferenzaR-Probabilità = -85
Guadagno del nero su 370000 giocate: -10024; Per giocata: -0.027092
Puntando anche un gettone sullo Zero, Guadagno = -16532

Serie V.6: 179748 N, 180212 R, 10040 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.9986
DifferenzaN-Probabilità = -252, DifferenzaR-Probabilità = 212
Guadagno del nero su 370000 giocate: -10504; Per giocata: -0.028389

Serie V.7: 179727 N, 180120 R, 10153 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.998483
DifferenzaN-Probabilità = -273, DifferenzaR-Probabilità = 120
Guadagno del nero su 370000 giocate: -10546; Per giocata: -0.028503
Puntando anche un gettone sullo Zero, Guadagno = -15038

Serie V.8: 179959 N, 180058 R, 9983 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999772
DifferenzaN-Probabilità = -41, DifferenzaR-Probabilità = 58
Guadagno del nero su 370000 giocate: -10082; Per giocata: -0.027249
Puntando anche un gettone sullo Zero, Guadagno = -20694

Serie V.9: 180395 N, 179814 R, 9791 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.002194
DifferenzaN-Probabilità = 395, DifferenzaR-Probabilità = -186
Guadagno del nero su 370000 giocate: -9210; Per giocata: -0.024892
Puntando anche un gettone sullo Zero, Guadagno = -26734

Serie V.10: 179876 N, 179951 R, 10173 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999311
DifferenzaN-Probabilità = -124, DifferenzaR-Probabilità = -49
Guadagno del nero su 370000 giocate: -10248; Per giocata: -0.027697
Puntando anche un gettone sullo Zero, Guadagno = -14020

VI. DIECI SERIE DI 3700000 GIOCATE CIASCUNA

Media (N &R) = 1800000; Media Z= 100000; Deviazione standard = 961.417872

Serie VI.1: 1801085 N, 1799277 R, 99638 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000603
DifferenzaN-Probabilità = 1085, DifferenzaR-Probabilità = -723
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -97830; Per giocata: -0.026441

Serie VI.2: 1800968 N, 1798496 R, 100536 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000538
DifferenzaN-Probabilità = 968, DifferenzaR-Probabilità = -1504
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -98064; Per giocata: -0.026504

Serie VI.3: 1799481 N, 1800627 R, 99892 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999712
DifferenzaN-Probabilità = -519, DifferenzaR-Probabilità = 627
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -101038; Per giocata: -0.027308

Serie VI.4: 1800221 N, 1799404 R, 100375 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000123
DifferenzaN-Probabilità = 221, DifferenzaR-Probabilità = -596
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -99558; Per giocata: -0.026908

Serie VI.5: 1803273 N, 1796638 R, 100089 Z

Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.001818
DifferenzaN-Probabilità = 3273, DifferenzaR-Probabilità = -3362
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -93454; Per giocata: -0.025258

Serie VI.6: 1800662 N, 1800163 R, 99175 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000368
DifferenzaN-Probabilità = 662, DifferenzaR-Probabilità = 163
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -98676; Per giocata: -0.026669

Serie VI.7: 1799926 N, 1800116 R, 99958 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999959
DifferenzaN-Probabilità = -74, DifferenzaR-Probabilità = 116
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -100148; Per giocata: -0.027067

Serie VI.8: 1800161 N, 1799856 R, 99983 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 1.000089
DifferenzaN-Probabilità = 161, DifferenzaR-Probabilità = -144
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -99678; Per giocata: -0.02694

Serie VI.9: 1799468 N, 1800706 R, 99826 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999704
DifferenzaN-Probabilità = -532, DifferenzaR-Probabilità = 706
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -101064; Per giocata: -0.027315

Serie VI.10: 1798820 N, 1801066 R, 100114 Z
Rapporto FrequenzaN/Probabilità = 0.999344
DifferenzaN-Probabilità = -1180, DifferenzaR-Probabilità = 1066
Guadagno del nero su 3700000 giocate: -102360; Per giocata: -0.027665

