

DIALOGO SULLA GEOMETRIA ASSIOMATICA



David Hilbert

*<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Hilbert.jpg>
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons*

- *Ehilà, Davide, gridò un amico ad un trentenne occhialuto che camminava velocemente sulla Magisterstrasse a Königsberg Kneiphof (cioè proprio sull'isola da cui partivano cinque dei famosi sette ponti).*
- *Ah, ciao, replicò senza entusiasmo l'occhialuto, che evidentemente stava pensando a qualcosa che lo assorbiva profondamente e non desiderava essere disturbato.*
- *Sempre immerso nei tuoi pensieri? E sempre con quel tuo cappello bianco?*
- *Che c'entra il mio cappello? Chiese Davide irritato.*
- *Ma insomma, con chi ce l'hai?*
- *Se proprio vuoi sapere, ce l'ho con Euclide.*
- *Ma non hai niente di meglio da fare? E' morto da un pezzo.*
- *Morto sì. Ma ti rendi conto che da quando esistono i suoi "Elementi", o da quando sono stati stampati, ogni persona colta deve averli letti e prenderli come oro colato? Il suo influsso nefasto continua.*
- *Piano, disse l'amico, non esageriamo.*

- *Va bene, lo so, esagero. Ma il fatto è che l'opera di Euclide, al quale mi inchino, ne ha fatto un mostro sacro. Guai se uno si permettesse di dire che è meno che perfetto. E invece ci sarebbe molto da ridire.*
- *Non ricomincerai anche tu con il Quinto Postulato.*
- *Ma no, il quinto postulato sta bene com'è, e ci hanno già pensato altri. Quello che non mi va è proprio com'è costruito il sistema.*
- *Ma che cosa c'è che non va nel sistema?*
- *Allora, se vuoi sapere, stammi a sentire. Anzi, meglio, entriamo in questa birreria, beviamo una birra e ti spiego.*

I due entrano nella birreria, ordinano una birra e si siedono.

- *Dunque, gli "Elementi" di Euclide constano di tredici libri. Il primo libro...*
- *Calma, non vorrai farmi il riassunto degli "Elementi"?*
- *Qualcosa dovrò pur dirne, se vuoi sapere cosa penso degli "Elementi".*
- *Allora avanti.*
- *Dunque gli "Elementi" si aprono con ventitré Definizioni (che lui chiama "Oroi"), cinque "Postulati" che lui chiama "Aitémata" (le due parole sono l'una la traduzione dell'altra, postulati in latino, aitemata in greco) e "Cinque nozioni comuni". Niente di tutto questo può essere dimostrato. Poi attacca con le "Proposizioni" divise in "Teoremi" e "Problemi". Da secoli si discute se i Postulati e le Nozioni Comuni siano poi tanto diversi. E da altrettanto tempo si discute la stessa cosa su Problemi e Teoremi.*
- *Va bene, mettiamo pure che postulati e nozioni comuni siano la stessa cosa e che anche teoremi e problemi siano la stessa cosa - anche se io, personalmente, qualche differenza la vedo. Per esempio mi sembra che i postulati si riferiscano a oggetti geometrici e le nozioni comuni abbiano un carattere più generale e possano valere per altre scienze.*
- *Va bene, va bene, disse frettolosamente Davide agitando le mani come per scacciare un pensiero molesto.*
- *E anche credo che la distinzione delle Proposizioni in Teoremi e Problemi sia posteriore a Euclide. Lui elenca solo i numeri e non dice se siano Proposizioni, Problemi o Teoremi.*

Davide era evidentemente vessato. Disse:

- *Ma il problema non è la terminologia. Per me il problema sta nelle definizioni. Le proposizioni vanno dimostrate e quasi tutte le dimostrazioni di Euclide sono accettabili. Assiomi e nozioni comuni sono elementi necessari. Secondo me sono la parte essenziale del sistema, anche se si potrebbero enunciare meglio.*
- *Meglio di Euclide?*
- *Ma sicuro. Molto meglio. Alcuni di questi assiomi praticamente non li usa mai neanche lui. Che bisogno c'è di elencarli? Altri li usa senza averli elencati. Dove ha mai detto che due cerchi con centro agli estremi di un segmento e raggio eguale alla lunghezza del segmento si intersecano? Eppure questa proprietà la usa per costruire un triangolo equilatero. Vecchio truffatore! E l'imprecisione! E poi il disordine, Mein Gott! Il disordine. Ma ne parliamo dopo. Per me il problema sono le definizioni.*
- *Cioè?*
- *Sono impossibili, sono necessariamente vaghe, sono inutili!*
- *Perché impossibili? Perché vaghe? Perché inutili?*
- *E' ovvio che sono impossibili. Ogni definizione di un concetto nuovo deve essere data usando parole il cui significato è noto. Ma se uno non conosce il significato di qualcuna di queste parole, ha bisogno che anche queste siano definite. Alla fine della catena o ti ritrovi al punto di partenza, cioè usi nella definizione alcune delle parole che devi definire, oppure ti trovi con delle parole che non puoi definire. Naturalmente questo non si applica a tutte le definizioni di Euclide, soprattutto se sono date basandosi su parole definite nelle precedenti definizioni.*
- *Voglio un esempio.*
- *Subito. Definizione N.1 : "Un punto è ciò che non ha parti". Anche il nulla non ha parti. Che cosa distingue il punto dal nulla? E poi guarda la definizione di angolo retto, Definizione 15. Dice che se una linea viene tracciata da un punto ad un'altra linea e forma al punto di contatto due angoli eguali, questi sono retti.*
- *Mi pare chiaro.*
- *Non lo è affatto, se non sai cosa voglia dire eguale. Alla fine o non sai cosa vuol dire angolo retto o non sai cosa vuol dire eguale.*

- *Euclide non lo dice?*
- *No che non lo dice. Le cinque nozioni comuni (che vengono dopo le definizioni) si riferiscono alle proprietà di cose eguali e non eguali. Ma la quarta nozione comune dice che due cose sono eguali se coincidono. E che diavolo vuol dire? Però quello che non perdono a Euclide è la Proposizione 35, che dice che due parallelogrammi tracciati tra le due stesse parallele e con egual base sono eguali. Dice proprio così, “eguali”, stessa parola. Semmai è eguale l’area, che Euclide non definisce. E due parallelogrammi come quello verde e quello rosso non coincidono e non possono esser portati a coincidere, anche se hanno la base in comune e sono tracciati fra le stesse parallele..*



- *Ho capito. Ma allora, cosa vorresti fare?*
- *Ovvio, bisogna eliminare le definizioni.*
- *Ma allora non sapresti neanche di cosa parli.*
- *In pratica neanche Euclide sa bene di cosa parla. Ma non ce n’è bisogno. Per me la geometria è una costruzione architettonica, come una cupola grandiosa. Non ti importa di che cosa è fatta, sassi, ferro, legno... quello che importa è la legge secondo cui tutti i pezzi sono messi insieme, che non permette alla cupola di cadere. Così la geometria: niente definizioni, solo le leggi a cui elementi (che non definiremo) devono obbedire. Queste leggi sono gli assiomi. Ed il sistema sta in piedi.*
- *Ma la tua geometria sarebbe un mostro, una costruzione senza fondamenta una geometria solo “assiomatica” ... un orrore!*
- *Sai che mi hai dato un’idea? Mi sembra il nome giusto. La mia geometria si chiamerà “Geometria Assiomatica”. Mi piace.*
- *Non era il risultato che volevo ottenere. Ma ci sono i punti nella tua geometria?*
- *Certo che ci sono.*
- *Oh, finalmente. E che cosa sono?*

- Sono A, B, C ...
- Non ho capito. Che cosa sono A, B e C ?
- Sono i punti.
- E le rette?
- Semplice. Le rette sono r, s, t ...
- Ho capito, il resto lo so da me. E r, s, t sono le rette. E magari mi dirai che α, β, γ sono i piani.
- Precisamente. Vedo che hai capito.
- Ma proprio niente.
- Oh, insomma. Punti, piani, rette, sono gli elementi della mia geometria. Non li definisco, ma dico che questi elementi hanno tra loro relazioni mutue, che noi nel linguaggio comune indichiamo con parole come “essere situati”, “tra”, “continuità”, “parallelismo”, “congruenza”, la cui descrizione completa ed esatta deriva dagli assiomi.
- Ma allora potresti parlare allo stesso modo di queste tavole, queste sedie, questi boccali di birra. Sarebbero loro i tuoi punti? Le tue rette? I tuoi piani?
- Se rispettano i miei assiomi, senza dubbio. E tieni presente che anche i punti, le rette, i piani tracciati su carta sono solo dei rozzi modelli dei punti, delle rette, e dei piani che Euclide aveva in mente. Però, sai che mi hai dato un'altra idea? Tavoli, sedie, boccali di birra! Mi piace. Adesso ti lascio.
- Ma non mi dici i tuoi cinque assiomi? Sono evidenti quanto quelli di Euclide?
- I miei assiomi non saranno affatto evidenti. E chi ti ha detto che saranno cinque? Saranno decisamente di più. Ma non li ho ancora scritti. Penso di enunciarne una ventina, ma in bell'ordine, non come Euclide. Che ne dici di cinque gruppi? Ma quello che è importante è che il mio sistema sia completo e non porti a contraddizioni. Sono sicuro di riuscire. Ma scusa davvero, adesso me ne vado.
- Va bene, ciao. Però, quel cappello bianco...
- Che c'entra il mio cappello?

- *Non ti dona.*
- *Va a farti friggere.*

Hilbert era troppo ottimista e nel 1930 Gödel dimostrò che un sistema di assiomi completo e non contraddittorio non può essere creato, a meno di essere banale. Ma di questi teoremi, uno dei pinnacoli dell'ingegno umano, si occuperanno quelli che studieranno logica. Noialtri pedoni, invece, uno di questi giorni vedremo un esempio di geometria che segue i dettami di Hilbert, anche se non proprio con panche, tavoli, boccali di birra.