INTERNO O ESTERNO ?

Un'applicazione del Teorema di Jordan

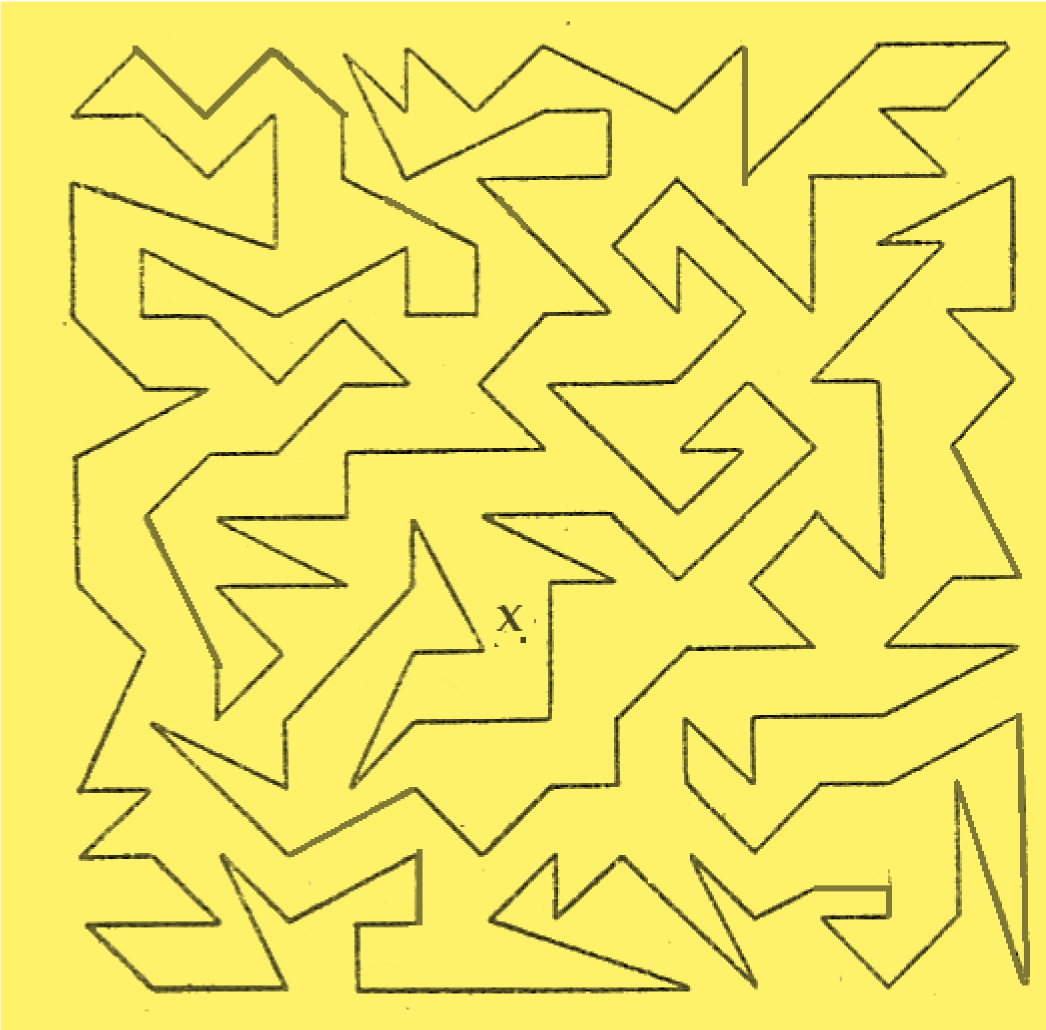


Fig.1

A prima vista è difficile stabilire se la spezzata in Fig.1 sia un poligono chiuso oppure no. E, una volta stabilito che abbiamo a che fare con un poligono chiuso, non è immediato decidere se il punto X sia all'interno o all'esterno del poligono. Non è immediato, naturalmente, se non si conosce una delle più elementari applicazioni del teorema di Jordan (Camille Jordan, 1838-1922), che dimostrò come qualmente *una curva che sia piana,* *semplice (non intersechi se stessa) e chiusa* ***(curva di Jordan),*** divida il piano in due regioni una interna alla curva e una esterna alla curva, separate, nel senso che non si può passare dall'una all'altra senza attraversare la curva.

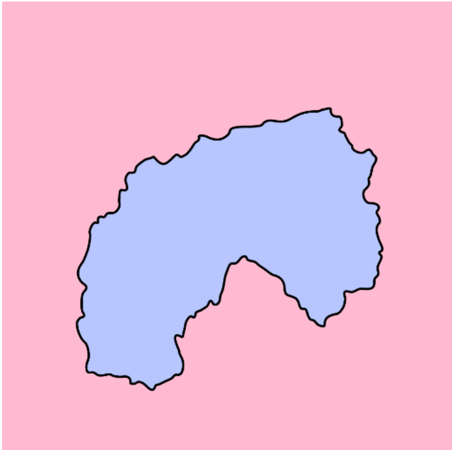


Fig.2
Curva (chiusa) di Jordan che divide il piano in una regione esterna rosa e una interna azzurra.
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/Jordan_curve_theorem.svg

Il Teorema di Jordan dice che le due regioni azzurra (interna) e rosa (esterna) in Fig.2 non si mescolano, il che sembra ovvio. Ma, come spesso avviene in matematica, i concetti più ovvi finiscono con essere tra i più lunghi da dimostrare. Il caso del Teorema di Jordan è esemplare. La dimostrazione fu pubblicata da **Camille Jordan nel 1887** e la prima impressione fu di stupore: "C'era proprio bisogno di volersi mettere a dimostrare qualcosa di ovvio?" (in verità era stato **Bernard Bolzano (1781-1848)** ad affermare che il teorema esigeva una dimostrazione); la seconda fu di incredulità: "È mai possibile che la dimostrazione di un fatto quasi intuitivo non sia né breve né semplice?" Poi saltarono fuori i critici, che dissero che la dimostrazione data da Jordan era sbagliata, o incompleta, o non rigorosa, fino a che l'americano **Oswald Veblen** non diede una dimostrazione rigorosa e accettata da tutti nel 1905. Poi per un secolo si ripeté religiosamente la litania: "Jordan diede una dimostrazione non rigorosa, e Veblen diede la prima dimostrazione rigorosa". Ma a partire dagli anni 2000 ci fu un nuovo capovolgimento della situazione: **Thomas Hales** trovò che molti di coloro che ripetevano la litania, la ripetevano per averla sentita enunciare dai loro professori i quali a loro volta… senza che nessuno si fosse mai preso la briga di analizzare la dimostrazione di Jordan. Lui lo fece, e trovò che, a parte qualche rifinitura, la dimostrazione era perfettamente accettabile (2007). Secondo me qualcosa di assai simile capitò con la soluzione dell'equazione polinomiale di quinto grado, per cui la litania è:" L'italiano Ruffini diede una dimostrazione dell'impossibilità di risolvere l'equazione di quinto grado per mezzo di radicali, ma la sua dimostrazione presentava una grave lacuna. Il teorema di Abel, che colmò la lacuna, viene anche attribuito (generosamente) a Ruffini. Etc." Eppure alla fine del secolo XIX i corsi di analisi francesi da me consultati presentavano una dimostrazione dovuta a Wanzel, che si ispirava più a Ruffini che a Abel, e non parlava di alcuna "grave lacuna".

Ma torniamo a noi:

Il teorema di Jordan stabilisce che una curva semplice (che non si incrocia) chiusa, divide i punti (non appartenenti alla curva C: questi sono sul confine e non si sa da che parte stanno) di un piano in due domini distinti (senza punti comuni), di cui C costituisce il contorno comune.

Daremo una dimostrazione di questo teorema per il caso in cui C è un *poligono* chiuso P. Qui seguo il Courant & Robbins, ma con alcune precisazioni (in blu) che mi sono sembrate necessarie.

(Per convincermi dei passi successivi, ho dovuto pensare che uno dei vantaggi di dimostrare il problema per un poligono, non necessariamente convesso, ma chiuso, è che questo può essere sempre completamente racchiuso, ad esempio, in una circonferenza di raggio R sufficientemente grande).

Avremo dunque i punti divisi in due classi, che chiameremo A e B, tali che due punti appartenenti a una stessa classe possano essere sempre essere congiunti da una linea per esempio una poligonale (per intenderci, una spezzata), che non attraversa mai il contorno P, mentre per congiungere qualsiasi punto della classe A a qualsiasi punto della classe B la poligonale deve attraversare P. Una delle due classi formerà l' "interno" e l'altra l'"esterno" del poligono. Vedremo come. (Qui, curiosamente, C&R tirano fuori il coniglio dal cappello e rivelano – in modo superfluo e gratuito – quale delle due classi sarà l'esterno e quale l'interno).

Per incominciare si sceglie nel piano una **direzione fissa** non parallela a nessuno dei lati del poligono. Questo può essere fatto, perché i lati di P sono in numero finito. Su questa direzione definiremo un senso.

Perché non vogliamo che d sia parallela a nessuno dei lati di P? Perché se lo fosse, e noi scegliessimo due punti sulle estensioni di un lato parallelo a d, la retta che li congiunge avrebbe un numero infinito non contabile di punti in comune con P.

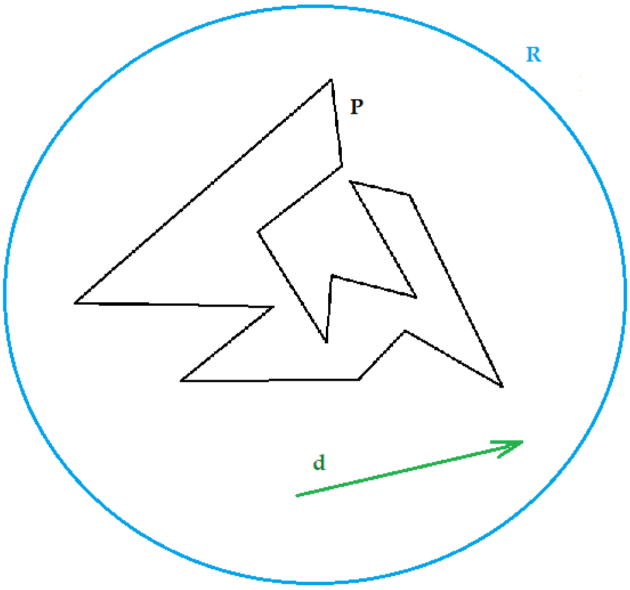


Fig.3
Poligono P, contenuto in un cerchio R. La direzione d ha un senso e non è parallela a nessuno dei lati di P

Ora diciamo che il punto p(A) contenuto nel cerchio R appartiene a A se la semiretta che parte da P(A) in direzione d, nel verso indicato interseca il poligono P in un **numero pari di punti** prima di raggiungere il cerchio R. Diremo di questi punti che godono la stessa proprietà di p(A), che hanno parità **pari.** Diremo invece che il punto p(B) appartiene alla classe B, se una simile semiretta partente da p(B) con direzione e verso assegnati interseca il poligono P in un **numero dispari di punti**. Diremo che i punti della classe B hanno parità dispari.

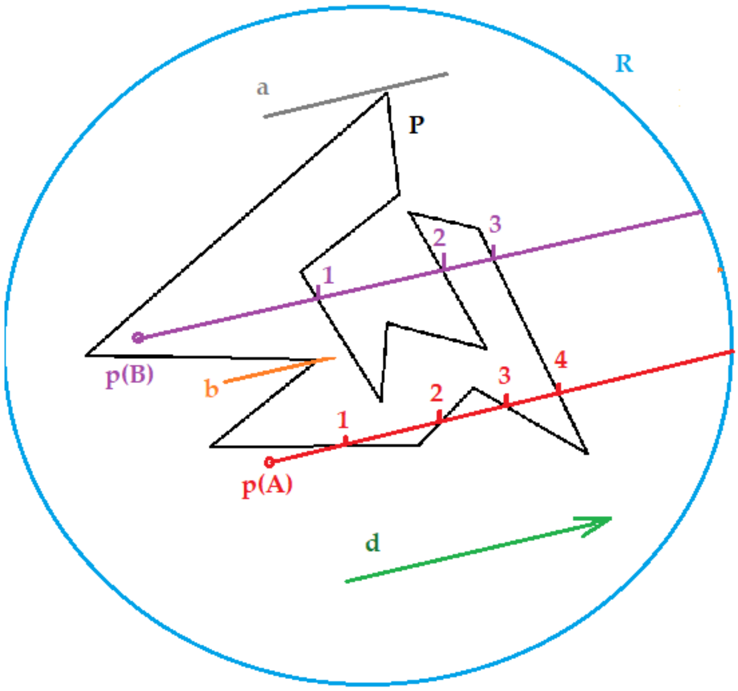


Fig.4

La situazione di p(A) e p(B) è illustrata in Fig.4.

Può accadere come nei casi *a* e *b* che la semiretta incontri un vertice. Allora l'intersezione al vertice conterà per 2 (cioè non conterà affatto, in quanto non cambierà la "parità" del numero di intersezioni) se i due lati che si incontrano in quel vertice sono da una stessa parte della semiretta, come nel caso *a*) e conterà per 1 se i due lati che si incontrano nel vertice sono da bande opposte della semiretta (caso *b*).

Diremo che due punti hanno la stessa parità quando appartengono alla stessa classe, A o B. *Dunque a ogni punto si assegna una data parità in base a quante volte incontra P la semiretta in direzione d e verso stabilito.*

Per un segmento, diremo che tutti i punti hanno la stessa parità **se il segmento non interseca P** (che sia all'interno o all'esterno di P).

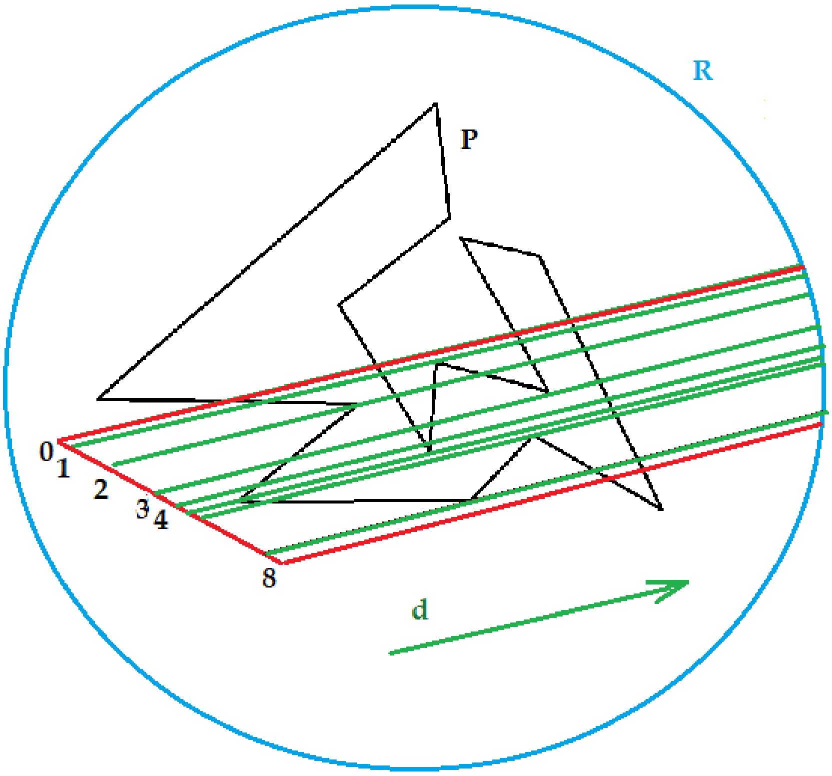
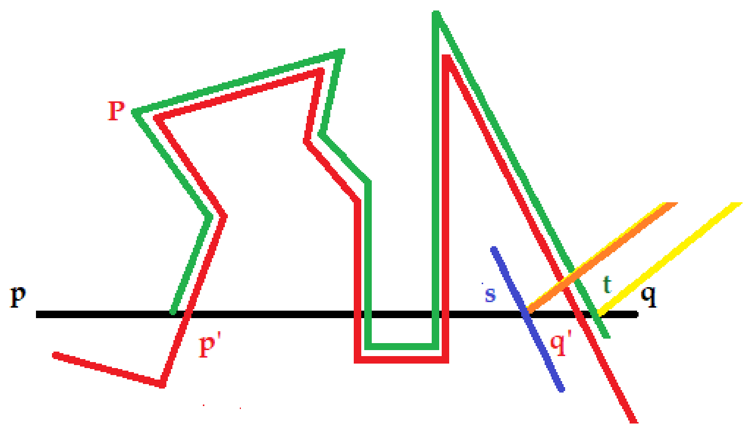


Fig.5

Si veda la Fig.5. Un punto si muove sul segmento (0,8) partendo da zero, punto che, come si può controllare, ha parità pari, in quanto la semiretta che ne parte e procede parallela a d nel senso stabilito incontra quattro volte il poligono P. Fino a che la semiretta partente dal punto in movimento da 0 a 8 non incontra un vertice, la parità non viene messa in discussione. La semiretta che parte da 1 incontra un vertice, ma i lati che vi si incontrano sono dalla stessa banda della semiretta parallela a d, e quindi non cambiano la parità del punto 1 rispetto al punto 0. La semiretta che parte da 2 incontra un vertice che di per sé vale 1, ma sostituisce un'intersezione di valore 1, e quindi non cambia la parità. Eccetera. Infine la semiretta che parte da 8 incontra due volte P.

Dunque, per connettere due punti p(A) e p(B), è necessario cambiare parità, e quindi la nostra poligonale (o "spezzata", cioè una successione continua di segmenti che hanno un estremo comune) deve aggiungere un'intersezione con P, cioè attraversare P, altrimenti la parità di p(A) e p(B) rimane la stessa.

Si può dimostrare che **due punti della stessa classe possono essere congiunti da un cammino poligonale che non interseca P**. Siano p e q i due punti in questione. Se il segmento che congiunge direttamente p e q non interseca P, esso è evidentemente il cammino cercato. Altrimenti, sia p' il primo dei punti di intersezione e q' l'ultimo di tali punti. Seguiamo dapprima il segmento p-p'. Poco prima di p' incominciamo a seguire da vicino il poligono P (cammino verde) , e lo seguiamo senza mai attraversarlo fino a che ritorna su p-q in t, tra q e q', e vicinissimo a q'. Se si riesce a dimostrare che questo cammino interseca p-q nel punto t tra q e q', allora si può continuare il cammino da t a q senza intersecare P.



Se l'intersezione fosse in s, "abbastanza vicino" a q' (cioè s e q' sono a distanza così piccola da non permettere a P di avere meandri tra l'uno e l'altro), s e t avrebbero parità differenti di 1, essendo da parti opposte di P: la semiretta (gialla) parallela alla direzione d prescelta, con inizio in t avrebbe un incrocio in meno della semiretta (color arancio) con inizio in s.

Quindi la parità cambia se il cammino verde "di ripiego" incontra il punto s tra p e q'.

Il cammino verde deve incontrare p-q tra q' e q, perché p, q e tutti i punti del cammino verde hanno la stessa parità.

A questo punto la dimostrazione del teorema di Jordan per il caso di un poligono P è completa. Si può ora identificare l'"esterno" di P con la classe A, classe dei punti con parità 0 (o pari) perché anche i punti di segmenti oltre il cerchio R hanno parità 0, cioè pari, non potendo incontrare il poligono P, che è contenuto in R. Tutti i punti con la stessa parità, come si è detto, appartengono alla stessa classe, in questo caso dei "punti esterni".

In contrasto, B sarà definito come "interno" di P. Ci sono solo due parità, pari e dispari, e c'è poco da scegliere.

Si può così determinare se un punto è interno a P, semplicemente contando le intersezioni di una semiretta di assegnata direzione e verso con P. Se il poligono è molto complicato, il procedimento è stupefacentemente semplice. La seguente figura è da Courant e Robbins, p.367 lo dimostra.

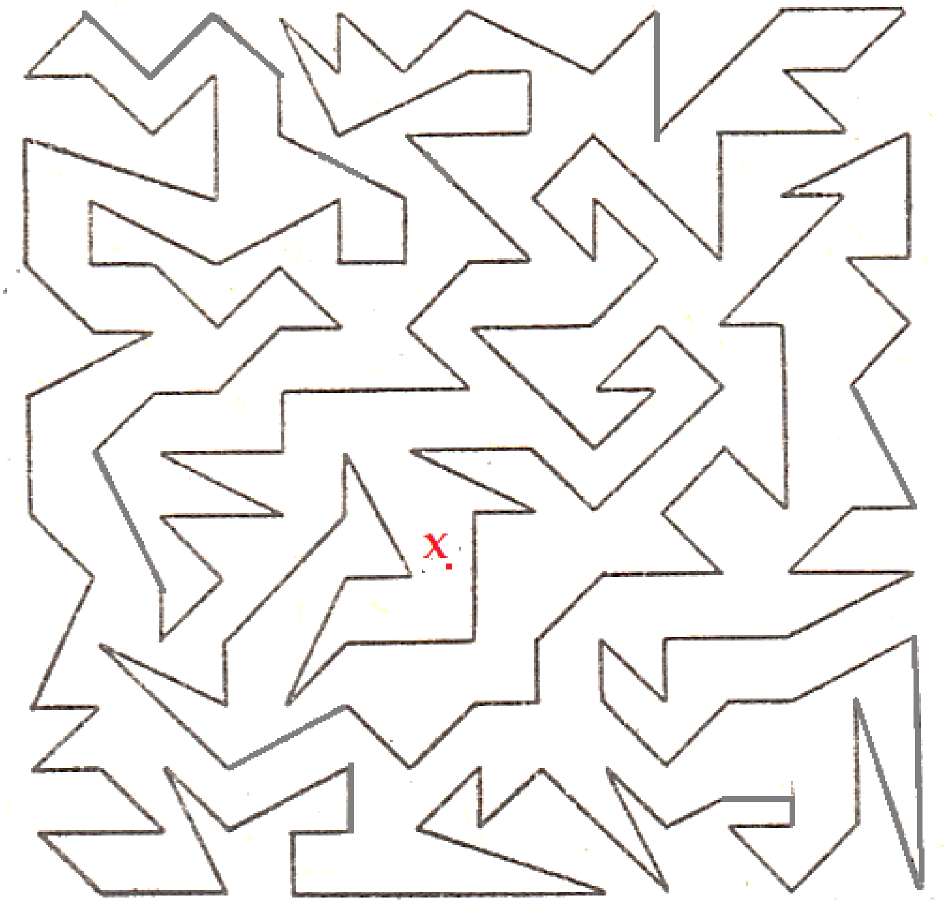


Fig.

Dire se X è dentro o fuori del poligono chiuso in figura può non essere semplice. Diventa banale se si applica la tecnica suggerita dal teorema di Jordan.

Questo teorema doveva servirmi per la dimostrazione del teorema dei Cinque Colori, che penso di aggiungere un giorno o l'altro in appendice al "Teorema dei Quattro Colori. Tuttavia, il risultato mi sembra così semplice e interessante, che vale la pena conoscerlo quanto prima.