NASCITA DEL CONCETTO DEI DETERMINANTI

Tratto dalla risposta alla domanda

Come è nato il concetto dei determinanti?

Fatta a Quora il 24 marzo 2018

Mia risposta, 14 agosto 2018

CHI CERCA TROVA (Traduzione, in massima parte, di **"Matrices and determinants",** di *J J O'Connor* and *E F Robertson*), con addizioni e sottrazioni. Il testo è reperibile su internet in http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

Il testo da me in gran parte tradotto incomincia col trattare il concetto di matrice, a suo parere introdotto dai Cinesi tra il 200 e il 100 BCE. Il testo di riferimento: è il "Nove capitoli sull'arte della matematica" o **九章算術**; pinyin: *Jiǔzhāng Suànshù* , collezione di problemi risolti, composta da generazioni di matematici cinesi a partire dal X secolo aC. Come esempio dell'uso di matrici viene data la soluzione di un sistema di 3 equazioni in tre incognite. Il nome di un autore cinese non è dato. Il metodo usato è il metodo oggi attribuito a Gauss (inizio del XIX secolo dC), come metodo di eliminazione o triangolarizzazione della matrice dei coefficienti. Esso non fa uso del concetto di determinante.

Quindi la mia fonte prosegue e tratta i determinanti.

Cardano, nella sua *Ars Magna* (1545), dà una regola per risolvere un sistema di due equazioni lineari che chiama *regula de modo* e che chiama *madre delle regole*. Questa regola fornisce essenzialmente la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema 2 × 2, sebbene Cardano non faccia il passo finale. Cardano quindi non raggiunge la definizione di determinante ma, noi, con il vantaggio del senno di poi, possiamo vedere che il suo metodo porta necessariamente alla definizione a noi nota.

Molti risultati standard della teoria elementare delle matrici apparvero per la prima volta assai prima che le matrici fossero oggetto di indagine matematica. Ad esempio **de Witt** nei suoi *Elements of curves* (Elementi di curve), pubblicato come parte dei commenti alla versione latina del 1660 del *Géométrie* di **Cartesio,** mostrava come una trasformazione degli assi riducesse una data equazione per una curva conica (cioè una curva di secondo grado nel piano) a "forma canonica". In termini moderni ciò equivale a diagonalizzare una matrice simmetrica, ma de Witt non pensò mai in questi termini.

"Forma canonica" in matematica è un'espressione ricorrente. Per esempio una curva di secondo grado può essere scritta in infiniti modi, ma i matematici preferiscono ridurre il polinomio di secondo grado in esame, mediante operazioni algebriche (reversibili) che corrispondono a soprattutto a traslazioni e rotazioni degli assi coordinati, a una di nove forme "canoniche", che corrispondono a curve diverse. Ciò è sempre possibile. A questo punto il matematico riconosce la curva in esame e ha a disposizione tutti gli studi fatti in precedenza da altri matematici e applicabili alla sua curva originale. In generale la "riduzione a forma canonica" di una classe di problemi permette di ridurre drasticamente il numero di casi da studiare, a cui si possono ricondurre tutti i casi particolari che ci si trova a dover risolvere.

L'idea di determinante apparve in Giappone prima di apparire in Europa. Nel 1683 **Seki Takakazu** (1642–1708) scrisse il suo *Kai-fukudai-no-hō* (解伏題之法), "Metodo per risolvere i problemi criticati" che contiene metodi che fanno uso di matrici scritte come tabelle identiche a quelle introdotte dai Cinesi e menzionate in precedenza (Vedi nota sul Wasan, la scuola di calcolo giapponese).

Pur senza avere fatto uso di una parola per indicare un "determinante", Seki fu comunque colui che introdusse i determinanti e fornì metodi generali per calcolarli sulla base di esempi. Usando i suoi 'determinanti' Seki fu in grado di calcolare determinanti di matrici 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4 e 5 × 5 e li applicò alla soluzione di singole equazioni ma non a sistemi di equazioni lineari.

Un determinante apparve per la prima volta in Europa solo dieci anni dopo. Nel 1693 **Leibniz** scrisse a **de l'Hôpital** spiegando che il sistema di equazioni

$10 + 11x + 12y = 0$
$20 + 21x + 22y = 0$
$30 + 31x + 32y = 0$

aveva una soluzione perché
$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$

relazione che esprime la condizione che la matrice dei coefficienti abbia determinante 0. Si noti che qui Leibniz non sta usando coefficienti numerici. In ogni "numero" la prima cifra indica l'equazione (o riga) in cui si trova una data quantità, il secondo indica la variabile (o colonna) alla quale la quantità si riferisce. Quindi 21 indica ciò che oggi scriveremmo piuttosto come a_{21} ove 2 e 1 sono gli indici della riga e della colonna in cui si trova una data quantità. In effetti qualsiasi sistema "omogeneo" di equazioni ha una soluzione non banale solo se ha determinante nullo, altrimenti avrebbe l'unica soluzione $x=y=z = 0$.

Leibniz era convinto che una buona notazione matematica fosse la chiave per progredire, ragion per cui sperimentò con diverse notazioni per i sistemi di coefficienti. I suoi manoscritti inediti contengono più di 50 diversi modi di scrivere sistemi di coefficienti su cui lavorò per 50 anni a partire dal 1678. Solo due pubblicazioni (1700 e 1710) contengono risultati sui sistemi di coefficienti usando la stessa notazione della sua lettera a de l'Hôpital di cui sopra.

Leibniz usò la parola "risultante" per certe somme di prodotti di termini di un determinante. Dimostrò vari risultati sui risultanti, inclusa quella che è essenzialmente la regola di **Cramer.** Sapeva anche che si poteva calcolare un determinante iniziando da qualsiasi colonna - quello che ora è chiamato metodo di sviluppo di **Laplace**. Oltre a studiare i sistemi di coefficienti delle equazioni che lo conducevano ai determinanti, Leibniz studiò anche i sistemi di coefficienti delle forme quadratiche, che portarono naturalmente alla teoria delle matrici.

Nel 1730 **Maclaurin** scrisse il suo *Treatise of algebra* (Trattato di algebra) che però non fu pubblicato fino al 1748, due anni dopo la sua morte. Esso contiene i primi risultati pubblicati sui determinanti che dimostrano la regola di **Cramer** per i sistemi 2 × 2 e 3 × 3 e indicano come si dovrebbe procedere nel caso 4 × 4. Cramer diede la regola generale per i sistemi n × n in un documento *Introduction to the analysis of algebraic curves* (Introduzione all'analisi delle curve algebriche), del 1750. Tale regola sorse dal desiderio di trovare l'equazione di una curva piana passante attraverso un certo numero di punti dati. La regola appare in un'Appendice al documento ma non ne viene fornita alcuna prova: - *Si trova il valore di ogni incognita formando n frazioni il cui denominatore comune ha tanti termini quante sono le permutazioni di n oggetti.*

Cramer continua spiegando precisamente come si calcolino questi termini, come prodotti di determinati coefficienti che compaiono nelle equazioni e come se ne determini il segno. Spiega anche come gli n numeratori delle frazioni possano essere trovati sostituendo certi coefficienti in questo calcolo con i termini noti del sistema.

Lavori sui determinanti ora incominciano ad apparire regolarmente. Nel 1764 **Bézout** diede metodi di calcolo dei determinanti come pure fece **Vandermonde** nel 1771. Nel 1772 **Laplace** affermò che i metodi introdotti da Cramer e Bézout non erano di uso pratico e, in un documento in cui studiava le orbite dei pianeti interni, discusse la soluzione di sistemi di equazioni lineari senza effettivamente calcolarla, usando i determinanti. Piuttosto sorprendentemente, Laplace fece uso della parola "risultante" per quello che ora chiamiamo determinante: la sorpresa nasce dal fatto che si tratta della stessa parola usata da Leibniz, ma Laplace probabilmente non era a conoscenza del lavoro di Leibniz. Laplace diede lo sviluppo di un determinante ("per colonne"), metodo che ora prende il suo nome.

Lagrange, in un articolo del 1773, studiò talune identità per determinanti funzionali 3 × 3. Tuttavia questo commento è fatto con il senno di poi poiché Lagrange stesso non vide alcuna connessione tra il suo lavoro e quello di Laplace e Vandermonde. Questo documento del 1773 sulla meccanica, tuttavia, contiene per la prima volta l'interpretazione del determinante come volume di un tetraedro . Lagrange dimostrò che il tetraedro formato da O (0,0,0) e dai tre punti M (x, y, z), M'(x', y ', z'), M "(x", y ", z") ha volume 1/6 [z (x'y" - y'x ") + z '(yx" - xy ") + z" (xy' - yx ')].

Il termine "determinante" fu introdotto per la prima volta da **Gauss** nelle sue *Disquisitiones arithmeticae* (1801), nel corso della sua discussione delle forme quadratiche. Gauss usò quel termine perché il determinante "determina" le proprietà della forma quadratica. Tuttavia il concetto non è identico a quello del nostro determinante. Nello stesso lavoro Gauss espone i coefficienti delle sue forme quadratiche in forma di matrici rettangolari. Egli descrive la moltiplicazione delle matrici come successione di sostituzioni lineari, il che lascia pensare che egli non avesse ancora sviluppato il concetto di algebra delle matrici. Inoltre introduce il concetto di matrice inversa nel particolare contesto delle matrici dei coefficienti delle forme quadratiche.

Fu **Cauchy** nel 1812 a usare il termine "determinante" nel suo senso moderno. Il lavoro di Cauchy è il più completo dei primi lavori sui determinanti. Nel suo testo criticò i risultati precedenti e diede nuovi risultati da lui scoperti sui minori dei determinanti e determinanti aggiunti. Nel saggio del 1812 il teorema della moltiplicazione dei determinanti viene dimostrato per la prima volta ,sebbene, nella stessa riunione dell'Institut de France, anche **Binet** avesse letto un documento che conteneva una dimostrazione del teorema della moltiplicazione, ma era meno soddisfacente di quello dato da Cauchy .

Di qui in avanti il documento da me sin qui tradotto procede con ulteriori sviluppi di matrici e determinanti che il lettore interessato potrà consultare per proprio conto, trovandovi una miniera di idee. Ma la domanda, ricordo, richiedeva solo la nascita del concetto di determinanti, e Cauchy ne è un po' la levatrice.