DIALOGO SECONDO DI NEWTON E DI UN AMICO

Un po' di formalismo, ma solo per coloro a cui piace (Parte II).

Dopo qualche tempo l'amico rivide Newton, che era tutto eccitato.

- *E allora, gli chiese, come va con le tue serie?*

- *Benone, rispose Isacco. Ho anche imparato a sommarle, sottrarle (che è facile), moltiplicarle, dividerle (che non è facile) … Adesso ti faccio vedere.*

- *Per piacere no, disse l'amico.*

Newton fu un po' deluso, ma disse:

- *Ho anche provato ad applicare le formule per la potenza di un binomio a ..... **non-numeri!***

- *Sei pazzo?* Gli chiese l'amico.

- *Per niente. Guarda un poco questa successione*

0 1 5 14 30 …

- *Molto bella,* disse l'amico.

- *Una successione di numeri come questa (e come tutte le altre che abbiamo visto) potremmo chiamarla FUNZIONE, che genericamente indicherò con f(n).*

- *Non credo che la tua funzione funzioni,* disse l'amico.

- *"Funzione" è un nome come un altro. E poi questa è una funzione discreta. Quello che importa è che quando io ti dico un numero **n** qualunque, la f(**n**) è una macchina che ti sputa fuori un numero con una legge ben definita. Nel nostro caso:*

n	f(n)
0	0
1	1
2	5

3	14
4	30

- *Va bene,* disse l'amico*, ma noi non sappiamo la legge, come la chiami tu, per calcolare questa f(n).*

- *Secondo me una tabella va benissimo. Basta che esista da qualche parte. Ma col mio metodo troveremo anche la legge per calcolare questa f(n).*

- *E come?*

- *Guarda, disse Newton. Introduciamo un nuovo oggetto, che io chiamerei operatore E (ma potremmo chiamarlo in qualsiasi altro modo) il quale fa passare da f(n) a f(n+1).*

  Cioè, per esempio,

$$Ef(0) = f(1) = 1 ,$$

$$Ef(1) = f(2) = 5,$$

$$Ef(2)= f(3) = 14.$$

- *Utile,* osservò sarcasticamente l'amico.

- *Più di quanto tu non creda, gli disse Isacco piccato. Per esempio possiamo scrivere* $f(3) = Ef(2) = E(Ef(1))= E(E(Ef(0)))$ *cioè* $f(3) = E^3f(0)$. *Hai capito dove voglio arrivare?*

- *No,* rispose onestamente l'amico.

- *Intanto abbiamo lo splendido risultato che* $f(n) = E^nf(0)$. *Ma hai visto come facciamo a calcolare f(n+1) che è eguale a Ef(n)? dobbiamo soltanto ricordare che*

$$f(n+1) = f(n) + [f(n+1)-f(n)].$$

- *Ma che bella scoperta!* Esclamò l'amico sempre più sarcastico.

- *Ma scusa, disse Isacco, calcoliamo le differenze successive.*

0 1 5 14 30 55 …

1 4 9 16 25 …

3 5 7 9…

2 2 2

0 0

- *Ma guarda!* Strillò l'amico eccitato. *Abbiamo già capito che i numeri della successione sono le somme dei quadrati successivi dei numeri interi positivi.*
- *Bravo, ma non è qui che volevo arrivare. Nota che le differenze della seconda riga (le possiamo chiamare differenze prime e indicarle col simbolo Δ) sono date dalla formula $\Delta f(0) = f(1) - f(0) = 1$; $\Delta f(1) = f(2) - f(1)= 4$ eccetera. D'accordo?*
- *Fin qui va bene,* disse l'amico.
- *Ma se accetti questo, accetti anche che* $\boldsymbol{E = 1+ \Delta}$**.**
- *Ma su cosa opera E? Su cosa opera Δ?*
- *Ma non importa!* Gridò Newton. *Questo è il bello del formalismo. Possiamo fare calcoli su E e su Δ proprio come se fossero numeri (o quasi). Mi hai detto che non c'è niente di speciale a dire che*

$$f(n+1) = f(n) + [f(n+1) - f(n)].$$

Ma questo possiamo scriverlo come $Ef(n) = f(n) + \Delta f(n)$, che è proprio $E f(n)= [1+ \Delta]f(n)$. Poi semplifichiamo f(n)….
- *Non credo mica che si possa fare,* disse l'amico.
- *Se funziona lo possiamo fare,* rispose Isacco.
- *Va bene, continua,* disse l'amico esausto.
- *Le differenze della terza riga, mi permetterai, spero, di chiamarle Δ^2.*
- *Non vedo perché.*
- *Ma se guardi, il 3 che è al primo posto della terza riga è dato dalla differenza tra 4 e 1, cioè $[f(2)-(f(1)] – [f(1)-f(0)]$, cioè $f(2)-2f(1)+f(0)$, cioè $(E^2 – 2E +1)f(0)$. Ma $(E^2 – 2E +1)$ non è altro che $(E-1)^2$, cioè Δ^2. … Ehi! Che ti prende?*

A questo punto l'amico era svenuto e Newton continuò da solo.

- *Eppure è così semplice!*

$$f(n) = E^n f(0) = (1+\Delta)^n f(0)$$

E non abbiamo altro da fare che applicare la formula generale per la potenza del binomio.

$$f(n) = E^n f(0) = (1+\Delta)^n f(0) = \left[1 + \Delta + \binom{n}{2}\Delta^2 + \binom{n}{3}\Delta^3 + \cdots \binom{n}{n}\Delta^n\right] f(0)$$

col risultato che tutte le differenze operano su f(0) e quindi sono solo le prime di ogni fila, cioè $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(0) = 3$, $\Delta^3 f(0) = 2$. E come se non bastasse, nel nostro preciso caso tutte le differenze al di là della differenza terza sono zero. Quindi f(n), che è la somma dei quadrati dei numeri naturali da 0 a n è semplicemente:

$$f(n) = f(0) + n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

Ora devi ricordare che f(0) =0, e poi, se vuoi, puoi "mettere in bella" i termini rimanenti. Ma i risultati ti vengono giusti anche con la formula"grezza" qui sopra.

Otterrai la formula generale per la somma dei quadrati dei numeri naturali da 1 a n, che è (con qualche trucco - eh sì, ci vuole un po' d'occhio):

$$f(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Qui l'amico di Isacco aprì un occhio, e disse*:"Ma questo lo sapevano anche i Greci!". Isacco, che era un po' permaloso, gli diede un pugno e l'altro si riaddormentò.*

**

Io però suggerisco di

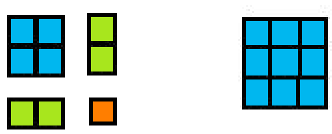
- verificare la formula che abbiamo trovato per valori di n maggiori di 5;

- provare a ricavare la formula che già conosciamo per la somma dei numeri da 1 a n (basteranno le differenze prime);
- o addirittura la somma dei cubi dei numeri da 1 a n (ci vorranno anche le differenze terze);
- eccetera

Una seconda annotazione è che se partiamo con la seconda riga e facciamo le differenze prme (che erano le differenze seconde della prima successione) troviamo i numeri dispari successivi, mentre, se facciamo le differenze seconde otteniamo costantemente 2 e le differenze terze (e successive) sono nulle.

0 1 4 9 16 25 …
1 3 5 7 9…
2 2 2 2
0 0 0

Chissà se questo ricorda qualcosa a quelli che hanno studiato i primi rudimenti del calcolo diffferenziale! Qui abbiamo una successione di numeri interi, la funzione n^2, ma che succede a passare al continuo e considerare la funzione x^2? Anche qui le derivate seconde sono costanti (= 2) e le derivate terze sono e successive sono nulle. Questo discende dalla parentela tra derivate e differenze. Ma, passando al continuo, abbiamo perso la bella relazione che le differenze dei quadrati dei numeri interi successivi sono i numeri dispari successivi, come può mostrare il simpatico disegnino (che suggerirei di provare a completare facendo il diagramma precedente e il successivo):

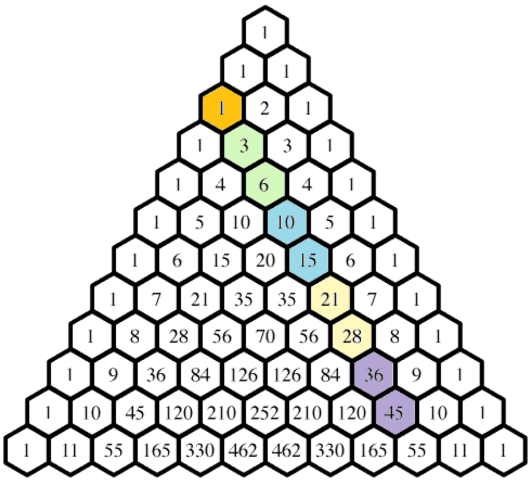


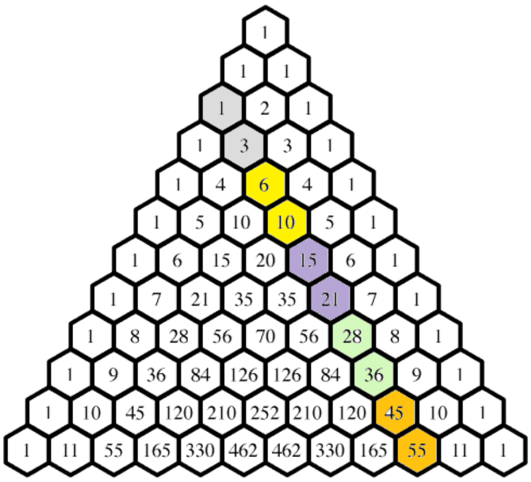
Notate poi che abbiamo una "foresta di animali matematici", il nostro vecchio triangolo di TP. Con le formula date sopra potete trovare varie famiglie di successioni interessanti di numeri e proprietà.

- La somma dei numeri della riga N è 2^N (facile da dimostrare).
- Se (e solo se) il secondo elemento di una riga è un numero primo *p*, tutti i numeri della riga sono divisibili per *p*.
- I quadrati si trovano dalla terza obliqua in modo curioso, sommando le coppie di numeri dello stesso colore. Se ci pensate bene, è un modo notevole di dare i

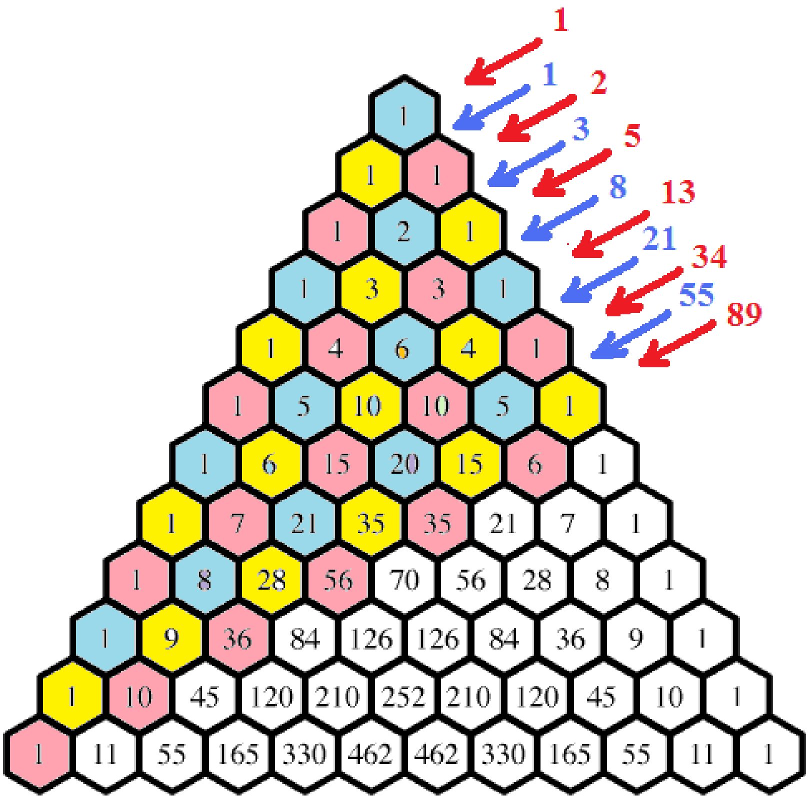
quadrati tanto dei numeri pari quanto di quelli dispari servendosi degli stessi numeri come “mattoni”.

- Se si fanno le somme dei numeri dello stesso colore, come indicato dalle freccette nell’ultima figura, si ottiene la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 etc., in cui ogni numero è dato dalla somma dei due precedenti. Si parte con 1, poi 1+0=1, poi 1+1 =2, 2+1=3 e via. Questa è la famosa “Serie di Fibonacci” (più che una serie, che è una somma, sarebbe una successione) ed ha un suo interesse specifico.





Quadrati (dei numeri dispari a sinistra, dei numeri pari a destra): somma delle coppie dello stesso colore.


1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89