DIALOGO TERZO DI NEWTON E DI UN AMICO

UN PO' DI FORMALISMO E QUALCHE NUMERO
ma solo per coloro a cui piacciono l'uno e gli altri
(Parte III e ultima).

L'amico ricomparve con un occhio nero. I due però decisero di fare la pace in un "pub" decente.
Isacco moriva dalla voglia di continuare a parlare delle sue serie. L'amico, che era un tipo paziente, lo capì, e – dopo tre birre - disse:

- *Allora, Isacco, come va con le serie? Fatti altri progressi?*

- *Ma certo,* rispose Isacco raggiante. *Ti ricorderai che la volta scorsa parlavamo dell'operatore $E = 1 + \Delta$, che potremmo chiamare "incremento"?*

All'amico l'operatore "incremento" , per vari motivi, a cominciare dal nome, non era piaciuto. Ma disse:

- *Mi ricordo.*

- *E ti ricordi che $E^n f(0)$ l'avevamo messo eguale a $f(n)$?*

- *Mi ricordo,* disse l'amico sempre meno entusiasta.

- *Ma allora, disse Isacco: secondo te che cosa vuol dire*

$$\boldsymbol{E^r f(0)} \quad ?$$

con r compreso tra 0 e 1? Che poi, tra l'altro, va anche bene per $E^r f(n)$.

- *Non ne ho la minima idea,* disse l'amico.

- *Ma ragiona! Insistette Isacco. $E^1 f(0)$ dà $f(1)$. Quanto può valere $E^{0.5} f(0)$?*

L'amico bevve una birra intera, poi disse:

- *Forse $E^{0.5} f(0) = f(0.5)$?*

Poco mancò che Isacco lo abbracciasse.

- *Capisci che adesso possiamo interpolare, cioè calcolare i dati intermedi in una tavola numerica? L'altro giorno certi miei amici dovevano calcolare sin(37°) e avevano una tavola che conteneva sin(30) e poi sin (40).*
- *Mi pare che non stessero tanto male.*
- *Potevano stare meglio.*
- *E come?*
- *Come, mi domandi? Ma se abbiamo detto che E = 1 + Δ, vuol dire che*

$$\boldsymbol{E^r f(n) = (1 + \Delta)^r f(n).}$$

- *Siamo da capo!* Strillò l'amico, che ricordava ancora il pugno.
- *Non ti agitare, che ti fa male,* disse Isacco. *Ti assicuro che funziona. Tu sviluppi la potenza del binomio come eravamo d'accordo* (su questo accordo l'amico sembrava poco convinto) *e trovi che:*

$$\boldsymbol{f(n+r) = f(n) + r\,\Delta f(n) + \left(\frac{r(r-1)}{2}\right)\Delta^2 f(n) + \cdots}$$

Vedi la bellezza? Per calcolare E^r, con r non intero, ci occorrono soltanto le differenze "intere", cioè prime, seconde etc.

Nota che r deve essere tra 0 e 1. Quindi in realtà è dato da una frazione dell'intervallo. Per esempio in sin(37°) r non è uguale a 7, ma è 7/(40-30), cioè 0.7.

- *E gli altri termini?*
- *Ho idea che con due termini ne abbiamo da vendere, ma possiamo continuare fin che ci pare. Se ti metti con un po' di buona volontà li calcoli anche tu. Son sempre gli stessi.*
- L'amico bevve un'altra birra e disse: *Il prossimo termine allora è*

$$(r(r-1)(r-2))/6$$

moltiplicato per la differenza terza?

- *Precisamente*, rispose Isacco. *Facciamo un esempio per sin(37°), che tavole accurate ci dicono essere* ***0.601815023*** *(ma noi naturalmente facciamo finta di non saperlo).*

Angolo	Valori (dalle tavole)	Differenze prime, Δ	Differenze seconde, Δ^2	Differenze terze Δ^3
30°	0.5000000			
		0.14278761		
40°	0.64278761		- 0.019530777	
		0.123256833		-0.003745019
50°	0.766044443		- 0.02327585	
		0.099980961		
60°	0.866025404			

Allora vedi che se ci fermiamo alle differenze prime (la cifra rossa), otteniamo, per r =0.7,

$$sin(37°) = sin(30°) + (0.7)\ (0.14278761) = \mathbf{0.599951369}.$$

Invece, se includiamo la differenza seconda, cifra verde, abbiamo:

sin(37°) = (teniamo tutto quel che abbiamo) + (correzione)

$$0.599951369 + \left(\frac{(0.7)(0.7-1)}{2}\right)(-0.019530777).$$

Spero che tu abbia tenuto conto dei segni: noi qui facciamo sempre la differenza dal basso verso l'alto.

La correzione sommata a quello che avevamo dà: ***0.60200210.***

Siamo ormai molto vicini. Ma aggiungiamo ancora un termine, la cifra blu:

$$\left(\frac{0.7(0.7-1)(0.7-2)}{6}\right)(-0.003745019) = -0001703983$$

Con questa correzione, il risultato è ***0.6018317*** *contro 0.601815 delle tavole. Tutto sommato, partendo da una tavola così rozza, che ci dà sinA di dieci in dieci gradi, è* *sorprendente che otteniamo un risultato con un errore così piccolo, tre parti su centomila, per un valore intermedio.*

E con questo Isacco se ne andò, e l’amico non lo vide più.

APPENDICE

PER COLORO A CUI PIACE IL FORMALISMO E CONOSCONO LA SERIE DI TAYLOR

Come abbiamo già notato, c'è una forte parentela tra "Differenze" e "Derivate", in quanto le derivate si possono ottenere prendendo opportune differenze e passando al limite. (Come è noto, non si può risalire invece da un integrale alla funzione originale. Sarebbe troppo bello).
L'esempio più elementare è, penso, quello del calcolo della derivata di x^2. La derivata, limite del rapporto incrementale, si ottiene nel modo seguente:

$$\frac{dx^2}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \right)$$

Che, passando al limite per $\Delta x \to 0$ porge

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

D'altra parte presumo che si sappia scrivere la serie di Taylor intorno al punto *a* come:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

Dove R_n è un opportuno resto di cui , al nostro modesto livello, non ci curiamo, ma facciamo l'ipotesi che si annulli per n tendente all'infinito.

Ci interessano due serie particolari:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Nessuno ci vieta di scrivere $x - a = h$, da cui:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{f''(a)h^2}{2!} \dots$$

E nessun altro ci vieta di scrivere x in luogo di a:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(x)h^2}{2!} \dots$$

Ed ora...sotto con gli operatori!

Anzitutto, l'operatore incremento, E, che ci faceva passare da n a n+1 quando n era un numero intero, ci fa ora passare da x a x + h, dove h ha un valore qualsiasi.
Quindi:

$$Ef(x) = f\,(x+h).$$

E

$$E^2 f(x) = f(x+2h)$$
$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

In secondo luogo, se introduciamo l'operatore D in luogo di $\frac{d}{dx}$ possiamo chiamare $f'(x) = Df(x),\ f''(x) = D^2 f(x)$ etc.
A questo punto, provare per credere, abbiamo le seguenti relazioni:

$$Ef(x) = \left(1 + hD + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} \dots\right) f(x) = e^{hD} f(x)$$

E, "semplificando":

$$E = e^{hD}$$

Che rappresenta in modo assai compatto la serie di Taylor.
Da questa formula seguono, con un pizzico di audacia formalistica:

$$(1+\Delta) = e^{hD}$$
$$\ln(1+\Delta) = hD$$

Queste formule ci permettono il calcolo delle successive differenze Δ in termini della derivata D e il calcolo numerico della derivata D in termini delle differenze Δ .
A tal scopo si applicano le formule date per le due serie di Taylor, con operatori invece di variabili.

Dalla prima (sviluppando l'esponenziale in serie, in termini di hD) abbiamo che

$$\Delta = hD + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} \ldots$$

Mentre dalla seconda (sviluppando il logaritmo in serie, in termini di Δ) si ottiene:

$$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}$$

Non sempre funziona in modo rigoroso, ma è – a suo modo - abbastanza divertente.