CALCOLO ELEMENTARE DELLE RADICI QUADRATE (E CUBICHE, E...)

I. RADICI QUADRATE

(Prerequisiti: le quattro operazioni)

Quello di fare un tentativo, vedere che succede, correggere il risultato e usare il tentativo corretto come nuovo tentativo, per vedere di nuovo che cosa succede, e ripetere il processo fino a che non siamo soddisfatti, è un sistema usato in molti casi. Per completezza, diciamo che in latino ripetere si dice “iterare”, e questo tipo di metodi si chiama “di iterazione” o “iterativo”, e i vari tentativi successivi, sperabilmente sempre più prossimi al risultato, sono “le iterate”.

Vediamo come usare un metodo iterativo per l'estrazione delle radici quadrate. Supponiamo di avere un numero, per esempio 23 e di volerne estrarre la radice quadrata.

$$\sqrt{23}$$

Un tempo si insegnava in seconda media un metodo piuttosto macchinoso per estrarre le radici quadrate, conoscendo solo le quattro operazioni. Si trattava di una variazione sul tema $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Credo che fosse tra le cose che si imparavano più lentamente e si dimenticavano più in fretta, col vantaggio che sembrava che non importassero a nessuno. Il metodo non veniva neanche chiesto all’esame. Qui vorrei cercare un metodo un poco più intuitivo, che non sia facile da dimenticare e funzioni.

Sappiamo che la radice quadrata di un numero è il numero che moltiplicato per se stesso riproduce il numero dato.

Dunque se dividiamo il numero per la sua radice quadrata otteniamo come risultato ancora la radice quadrata. Nessuna sorpresa: questa è la definizione della radice quadrata.

$$23/\sqrt{23} = \sqrt{23}$$

Se dividiamo il numero dato per un numero **maggiore** della radice quadrata, invece, il risultato sarà un numero **minore** della radice quadrata. Infatti moltiplicando due numeri entrambi più grandi della radice quadrata di 23 si ottiene un numero maggiore di 23. Allo stesso modo, se lo dividiamo per un numero minore della radice quadrata il risultato sarà maggiore della radice quadrata, perché moltiplicando due numeri minori della radice quadrata di 23 si ottiene un numero minore di 23.

Allora può venirci un'idea. Si prende 23 e lo si divide per un numero più piccolo (*) di 23, per esempio 5.
23/5= 4.6.
La nostra radice quadrata starà dunque fra 4.6 e 5.
Se facciamo la media tra 4.6 e 5 , otteniamo (4.6+5)/2= 4.8 e, dato che la radice quadrata è fra4.6 e 5, questo numero, 4.8, dovrebbe essere più vicino alla radice quadrata di 23 di quanto non lo fosse 5 e di quanto non lo sia 4.6.

Rifacciamo il gioco, usando la nuova approssimazione che abbiamo trovato:
23/4.8=4.7917;
La nostra radice quadrata sarà dunque tra 4,7917 e 4,8.
Si fa la media tra 4.7917 e 4.8 e si trova 4.79583.
Ora, la radice vera è appunto 4.79583.... In due passi e sei operazioni abbiamo trovato 5 cifre decimali. Come si fa a sapere quando dobbiamo fermarci? Se la radice quadrata non è esatta, in genere ci vien detto: andate fino a 2 o 3 o N cifre decimali.
In questo caso noi procediamo con questi calcoli fino a che le N prime cifre decimali non cambiano più.

Ma supponiamo di non essere particolarmente brillanti e di esser partiti con un numero molto diverso dalla radice quadrata, per esempio 10.
Niente paura, il metodo funziona ancora.
Primo passo:

$$\frac{23}{10} = 2.3$$

Vediamo che evidentemente se 10 era molto più grande della radice quadrata, 2.3 sarà molto più piccolo.

$$\frac{10 + 2.3}{2} = 6.15$$

$$\frac{23}{6.15} = 3.7398$$

$$\frac{6.15 + 3.7398}{2} = 4.94492$$

$$\frac{23}{4.94492} = 4.65124$$

$$\frac{4.94492 + 4.65124}{2} = 4.7981$$

Abbiamo dovuto camminare di più perché siamo partiti da più lontano. Ma intanto abbiamo già recuperato due cifre decimali ed al prossimo passo ne potremmo aggiungere altre due. Se provate, trovate 4.79584, con quattro cifre decimali esatte. Questo metodo, quando siamo vicini al risultato, ci dà due nuove cifre corrette per ogni passo.

Questo giochetto lo si può fare quasi a memoria, almeno per avere le prime due cifre corrette. Anche perché non siamo costretti, nei primi passi, ad usare esattamente i risultati che otteniamo: questi ci servono semplicemente per avere nuove, migliori approssimazioni, che possiamo prendere come nuovi punti di partenza. Però possiamo tranquillamente arrotondarli. E 4.8, che otteniamo al primo passo della nostra ricerca della √23, non è affatto una cattiva approssimazione. Differisce dalla vera radice di solo 0,004.

Notate che esistono anche simili mezzi per estrarre radici cubiche, quarte etc. Ma per trovarli occorre introdurre qualche nuova idea.

(*) Saremmo un po' sciocchi a prendere come numero di partenza maggior di (nel nostro caso) 23, visto che la radice quadrata di un numero è più piccoa del numero di partenza. Ma potete provare: semplicemente allungate il cammino, ma alla meta ci arrivate. Supponiamo di prendere come primo tentativo 40 (braccia strappate all'agricoltura!). 23/40 fa circa 0.5. E vediamo che (0.5+23)/2 = 11.75 ci dà una prima iterazione al di sotto di 23, dopodiché gli uccellini tornano a cantare sui rami etc. La matematica non tradisce così facilmente.

II. E LE RADICI CUBICHE?

Le radici cubiche di **cubi esatti** fino a sei cifre al massimo possono essere trovate a mente in pochi secondi: a tal scopo si ricordi che la radice cubica di un cubo esatto di sei cifre al massimo ha due cifre al massimo. Basta quindi che troviamo la prima e l'ultima cifra e il gioco è fatto, in quanto non ci sono altre cifre da trovare. Lo chiamo gioco, perché è effettivamente un gioco: nella mia ormai non breve esistenza

non ho mai avuto bisogno per motivi seri di calcolare la radice cubica di un cubo esatto, mentre in qualche caso ho dovuto calcolaree la radice cubica di un cubo non esatto.
Per il cubo esatto esiste un trucco.

Prima di tutto si deve imparare a memoria la tabella dei cubi delle cifre C da uno a dieci, e poi la si deve osservare.

C	Cubo	Ultima cifra	formazione
1	1	1	Stessa C
2	8	8	10-2 = 10-C
3	27	7	10-3 = 10-C
4	64	4	Stessa C
5	125	5	Stessa C
6	216	6	Stessa C
7	343	3	10-7= 10-C
8	512	2	10-8 = 10-C
9	729	9	Stessa C

Questa tavola può essere costruita in breve tempo. Si possono inventare dei trucchi, ma penso che la cosa più semplice, se non si conoscono i risultati a memoria,sia quella di eseguire i cubi, che sono moltiplicazioni assai semplici. Una volta nota la colonna dei cubi, si osservino le ultime cifre: in cinque casi la cifra finale è la C di partenza; in quattro casi simmetricamente disposti la cifra finale è 10-C. Dunque basta ricordare questo fatto fino a C = 5, perché se la cifra finale del cubo di 2 (= 5-3) è 8, la cifra finale del cubo di 8 (=5+3) sarà 2; mentre se la cifra finale del cubo di 1 (=5-4) sarà 1, la cifra finale di 9 (=5+4) sarà 9. In altro modo, le eccezioni sono solo 2 e 3, a cui corrispondono 7 e 8.

Ora si prenda il numero che ci è proposto, che per ipotesi è un cubo perfetto. Per esempio sia 19683.
La nostra tabella (terza colonna) ci dice che **la cifra finale del nostro cubo sarà 7.**
Ora si contino tre cifre da destra, resteranno in questo caso solo 2 cifre a sinistra, cioè 19. La prima cifra sarà quella il cui cubo è più vicino a 19 senza superarlo. Evidentemente si tratta di 2, la nostra prima cifra.
Quindi la radice cubica è 27.

Con un poco di preparazione il calcolo si fa in pochi secondi.
Ma vale solo per cubi esatti, che devono anche avere al massimo sei cifre. Cioè, il trucco vale solo per 100 numeri.

PROCEDIAMO

Prerequisiti: un po' di algebra, cioè il cubo di un binomio.
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Io desidero insegnare un metodo che vale sempre (naturalmente, per numeri grandi l'aiuto di una piccola calcolatrice che faccia le quattro operazioni accelera il processo). Come vedremo, il procedimento insegnato non sarà da buttare del tutto a mare.

Ora, nessuno che io conosca sa il metodo per estrarre radici cubiche usando le quattro operazioni. Di nuovo useremo un metodo iterativo di immediata (?!) comprensione. Il ragionamento è il seguente (e può anche essere usato per arrivare al risultato precedente per le radici quadrate, a cui è del resto strettamente legato).

Sappiamo che:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Qui, $(a+b)^3$, che chiameremo N, è il numero di cui vogliamo conoscere la radice cubica, cioè vogliamo conoscere a e b. L'idea è quella di costruire un meccanismo di iterazione che renda a sempre più vicino alla radice cubica di N.

Supponiamo di esser stati fortunati nella scelta di un'approssimazione di partenza , in modo che a >> b. Avremmo allora che
$(a+b)^3 = N \cong a^3 + 3a^2b$... trascurando gli altri termini, cioè

$$N - a^3 = 3\,a^2b$$

Questo ci permette di calcolare una prima approssimazione di $\boldsymbol{b}$**,** data da:

$$b = \frac{N - a^3}{3\,a^2}$$

Si voglia ad esempio la radice cubica 1030301 , il cubo di 100+1, come si vede svolgendo il binomio $(100+1)^3 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301$, e supponiamo di volerla calcolare seguendo il nostro metodo iterativo. Vediamo che il primo termine è 30 volte maggiore del secondo, che in prima approssimazione è quindi trascurabile.

$$b = \frac{N - a^3}{3\,a^2} = \frac{1030301 - 1000000}{300} = 1.01003$$

Aggiungendo la b trovata alla vecchia a troviamo:

$$a' = a + \frac{N - a^3}{3\ a^2}$$

Continuando l'esempio precedente, vediamo che

$$a' = a + \frac{N - a^3}{3\ a^2}$$

$$= 100 + \frac{1030301 - 1000000}{300} = 101.01003$$

Qui siamo già assai vicino al risultato, che, come sappiamo, è 101.

E poi?

E poi si calcola un nuovo

$$b' = \frac{N - a'^3}{3\ a'^2}$$

E un nuovo

$$a'' = a' + \frac{N - a'^3}{3\ a'^2}$$

Eccetera, fino a che raggiungeremo una a, che elevata al cubo sia vicina a N con la precisione desiderata.

Proviamo con **23**, di cui questa volta vogliamo la radice cubica.

Come primo tentativo per a, prendiamo per esempio 4, il cui cubo è 64, il quadrato è 16. Ma, dato che 4 è troppo grande (il cubo è molto maggiore del numero di partenza, che è ancora 23), la correzione sarà negativa.

Difatti:

$$b = \frac{N - a^3}{3\ a^2}$$

$$= \frac{23-64}{3 \cdot 16} = -\ 0.854167$$

$$a' = a + \frac{N - a^3}{3\ a^2} = 4 - 0.854167 = 3.14584$$

Il cubo di 3.14584 vale 31.13, che è ancora superiore a 23. Quindi la prossima correzione sarà ancora negativa.

Infatti:

$$a'' = a' + \frac{N - a'^3}{3\,a'^2} = 3.146 - 0.274 = 2.872$$

Il cubo di 2.872 = 23.6894.

(Ci stiamo avvicinando a 23).

Facciamo ancora un passo:

$$a''' = a'' + \frac{N - a''^3}{3\,a''^2} = 2.872 - \frac{0.6894}{3 * 8.248} = 2.8441$$

La radice cubica di 23 è 2.8438, e $2.8441^3 = 23.0057$, con una differenza del 6 per mille. Si vede che passo passo ci si avvicina, senza ragionamenti complicati, ma anzi, ripetendo sempre lo stesso passo.

Uno si può chiedere che succederebbe se non fosse stato fin da principio a >>b, come avevamo ipotizzato per semplicare le cose. Il risultato è come per le radici quadrate. Il sistema si autocorregge: solo si deve fare qualche passo in più. Difatti si vede che se è N >a^3 la nostra b è positiva, il che vuol dire che il nuovo a sarà maggiore del precedente; inoltre, la nostra prossima correzione b sarà minore della precedente, il che vuol dire che saremo più vicini all'obiettivo. Invece, se N< a^3 la nostra b sarà negativa in modo da ridurre il nostro esagerato primo tentativo. Provare per credere.

Ad ogni modo, se noi prendiamo N e **a partire da destra** lo dividiamo in gruppi di tre cifre (il primo gruppo a sinistra ne potrà contare 1 o 2 o 3), il numero di gruppi ci darà il numero di cifre della parte intera del risultato. Il primo gruppo a sinistra, paragonato alla prima colonna della tabella, ci darà la prima cifra della radice cubica, in genere una decina di volte più importante della seconda: essa costituirà già un buon inizio. Per esempio, il numero **88973452**, affettato come indicato, ci dà 88 nel primo gruppo, e, paragonandolo alla nostra tabella, vediamo che 4 sarà la prima di tre cifre.

Applichiamo quindi il nostro metodo partendo con a = 400. La prima iterazione darà:

a’ = 452; la seconda 446.5; la terza 446.43, il cui cubo è già 88987350, vicinissimo a quello iniziale. La radice cubica esatta è : 446.430111865. Abbiamo due cifre decimali esatte nella radice cubica, il che non è male.

Il lettore interessato potrà costruirsi un programmino in qualche semplice linguaggio, come SmallBasic per calcolare radici quadrate, cubiche, quartiche...di ordine $\boldsymbol{n}$, sempre più lente a convergere al giusto valore, ma valide sempre e per numeri anche assai grandi. Vedrete che ottenere il risultato giusto vi darà sempre una certa soddisfazione., soprattutto se noterete che il numero $\boldsymbol{n}$ darà poco impiccio, comparendo sempre allo stesso modo nelle formule per le iterate successive.