LE SOMME DI POTENZE DEI NUMERI NATURALI

(con l'aggiunta di tre dimostrazioni intuitive)

Ispirato da una domanda apparsa su Quora:

Come si fa a dimostrare che $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

1. Introduzione, con menzione della formula di Faulhaber.

Un problema di algebra non difficile è quello di calcolare la somma delle potenze dei numeri naturali, da 1 a n. Dico "non difficile "riferendomi a oggi, perché i matematici di tutto il mondo (dall'antica Grecia alla Persia al Giappone passando per l'India) vi si affaticarono intorno fin dalla più remota antichità, incominciando probabilmente con Pitagora di Samo. Stiamo parlando qui di un solo problema di matematica, ma c'è poco da fare: si inventano giochi e realtà virtuali sempre più sofisticate ogni giorno, ma il più grande, il più universale, il più appassionante, l'infinito gioco per tutte le età è ancora e sempre la matematica.

Il problema viene sovente risolto caso per caso, ma può interessare sapere che esiste una *facile* formula ricorsiva generale che permette di calcolare le somme di tutte le potenze di grado k dei numeri naturali da 1 a n. L'idea di base è semplice e conduce facilmente alla formula generale in termini di n e di k, che potrebbe essere applicata senz'altro. In verità, la sola difficoltà, che richiede qualche calcolo, è quella di mettere la soluzione generale applicata al caso che ci interessa, in una forma "elegante".

Per motivi che mi sfuggono, se si cerca in rete la formula generale, nella maggior parte dei casi si viene anzitutto inviati alla cosiddetta "*formula di Faulhaber*" (1631), data nella forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j},$$

in cui i numeri B(j) sono i cosiddetti *numeri di Bernoulli* del primo genere, per i quali vale B(1) = -1/2. A chi ha poca dimestichezza colla matematica, la formula appare abbastanza ostica. Si tratta in verità di nulla più che polinomi, i cui coefficienti non sono però immediati da calcolare.

Faulhaber (1) non si sognò neppure di dare nel 1631 la formula generale data da noi, anche perché i numeri di Bernoulli furono scoperti (2) nei primi anni del secolo XVIII, una settantina di anni dopo che Faulhaber produsse i suoi polinomi, validi per la somma delle prime diciassette potenze dei numeri naturali. In quanto alla dimostrazione rigorosa della formula data, pare che si sia dovuto aspettare più di duecento anni, fino all'arrivo di **Jacobi** (1834) (3). Per una storia dettagliata della scoperta e dimostrazione della formula di Faulhaber, si veda https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number.

Ma il nostro approccio sarà assai più semplice, e lasceremo stare i numeri di Bernoulli.

2. Un approccio più semplice.

Si supponga di dover calcolare la somma delle potenze k dei numeri naturali da 1 a n, per la quale introduciamo la notazione:

$$s_n^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k \dots + n^k$$

(1) Il punto di partenza è la formula di sviluppo del *binomio* $(x+1)^k$:

$$(1+x)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} x + \binom{k+1}{2} x^2 + \cdots \binom{k+1}{k} x^k + x^{k+1}$$

(2) in secondo luogo si sostituisce x =1, x=2, x= 3….x= n+1 nin tale formula e si ottiene la successione di equazioni:

$$2^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}1 + \binom{k+1}{2}1^2 + \dots \binom{k+1}{k}1^k + \mathbf{1^{k+1}}$$

$$3^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}2 + \binom{k+1}{2}2^2 + \dots \binom{k+1}{k}2^k + 2^{k+1}$$

$$3^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}3 + \binom{k+1}{2}3^2 + \dots \binom{k+1}{k}3^k + 3^{k+1}$$

…….

$$\boldsymbol{(n+1)^{k+1}} = 1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + \dots \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}$$

(3) In terzo luogo si sommano le equazioni membro a membro e termine a termine, tenendo presente la notazione appena introdotta:

$$s_n^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k \dots + n^k$$

Si osserva che, facendo la somma, tutti i primi membri si annullano cancellandosi con gli ultimi termini dei secondi membri (qui segnati con colori eguali) : restano solo l'ultimo termine del secondo membro della prima equazione, che vale 1 indipendentemente da k; e l'ultimo termine del primo membro. Entrambi i superstiti sono segnati in colore verde.

Il risultato è:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + n + \binom{k+1}{1} s_n^{(1)} + \binom{k+1}{2} s_n^{(2)} + \binom{k+1}{3} s_n^{(3)} \dots + \binom{k+1}{k} s_n^{(k)}$$

Per risparmiarci il lavoro in seguito potremmo quindi scrivere subito:

$$s_n^{(k)} = \frac{(n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{1}s_n^{(1)} + \binom{k+1}{2}s_n^{(2)} + \binom{k+1}{3}s_n^{(3)} \dots + \binom{k+1}{k-1}s_n^{(k-1)}}{\binom{k+1}{k}}$$

Questa è la nostra soluzione generale, una formula di ricorrenza che produce tutte le somme delle potenze che noi possiamo desiderare a partire dalla prima, $s_n^{(1)}$, con k =1. Una volta che questa è nota, si calcola la successiva, $s_n^{(2)}$, e via di seguito tutte le altre, fino a giungere alla desiderata $s_n^{(k)}$.

Incominciamo con $s_n^{(1)}$: sarebbe bene saperla a memoria (è la formula riconducibile a quella con cui **Gauss** (4) a cinque anni rivelò all'incredulo insegnante il suo genio matematico). Ponendo k=1 abbiamo:

$$s_n^{(1)} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{\binom{2}{1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Successivamente abbiamo :

$$s_n^{(2)} = ((n+1)^3 - (n+1) - \binom{3}{1}s_n^{(1)})/\binom{3}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3},$$

notando che

$$n(n+1)(2n+1) = \frac{2n(2n+2)(2n+1)}{4} = \frac{1}{4}\frac{(2n+2)!}{(2n-1)!}$$

Il passo successivo è

$$s_n^{(3)} = ((n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1}s_n^{(1)} - \binom{4}{2}s_n^{(2)})/\binom{4}{3}$$

Vale a dire :

$$s_n^{(3)} = (\,(n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1))/4$$

$$s_n^{(3)} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = [s_n^{(1)}]^2$$

E tutte le altre somme di potenze vengono ricavate per ricorrenza in simile modo.

Interessa in modo particolare l'ultimo risultato che ho riportato, che:

$$s_n^{(3)} = [s_n^{(1)}]^2$$

Cioè la somma dei cubi dei numeri naturali da 1 a n è eguale al quadrato della somma dei numeri naturali da 1 a n (questa è la risposta alla domanda apparsa su Quora).

Questo risultato è noto come “Teorema di Nicomaco” , da **Nicomaco di Gerasa**, odierna Jerash in Giordania (60-120 dC), noto quindi da quasi 2000 anni.

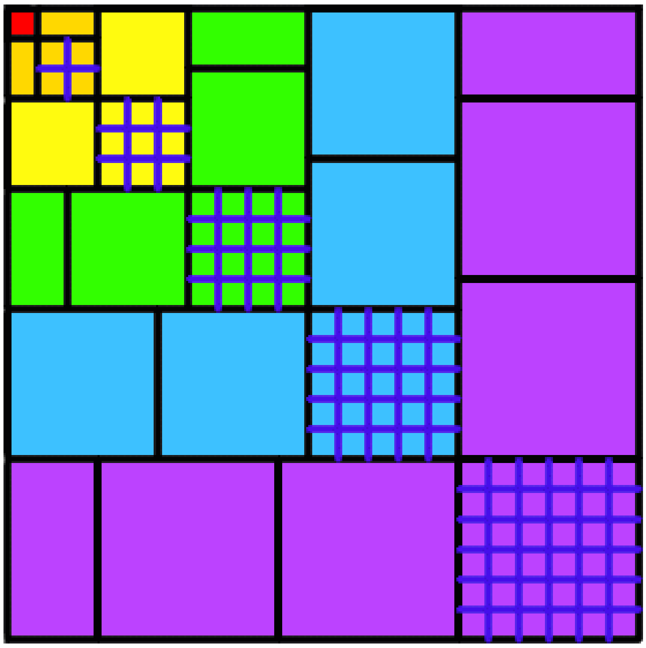
3. Una dimostrazione intuitiva.

In rete ho trovato in vari siti una ammirevole dimostrazione intuitiva.

Wikipedia dixit, (Squared triangular number - Wikipedia): Molti dei primi matematici hanno studiato e fornito prove del teorema di Nicomaco. Stroeker (1995) afferma che "ogni studioso di teoria dei numeri deve essersi meravigliato di questo fatto miracoloso". Pengelley (2002) trova riferimenti all'identità non solo nelle opere di ***Nicomaco****, ma anche in quelle di* ***Aryabhata*** *in India nel V secolo e in quelle di* ***Al-Karaji*** *circa 1000 in Persia. Bressoud (2004) menziona diversi altri primi lavori matematici su questa formula, di* ***Alchabitius (Al Qabisi,*** *X secolo, vissuto nell'attuale Iraq e Siria, morto nel 967),* ***Gersonide****s (circa 1300 Francia) e* ***Nilakantha Somayaji*** *(circa 1444- 1544 Kerala, India); Bressoud riproduce la prova visuale di Nilakantha.* Bressoud, nel suo lavoro, sembra non essere a conoscenza o non accettare il fatto che il teorema sia attribuito a Nicomaco e preferisca attribuirlo ad Aryabatha, 400 anni dopo. La dimostrazione intuitiva di Nilakantha, che Bressoud riproduce, è sostanzialmente la stessa che esporrò di seguito. Potrebbe essere originale di Nilakantha, potrebbe non esserlo. Tutto quello che posso dire è che, poiché la "dimostrazione" fornita da Nicomaco (che ho trovato nel corso di un’affrettata ricerca) non è in termini grafici, si può attribuire la dimostrazione intuitiva qui di seguito ad alcuni dei matematici successivi, che siano greci o arabi, indiani o cinesi (un candidato cinese potrebbe essere Jia Xian, del XI secolo).

La dimostrazione che ho scelto viene da Picture Story:

"Una soluzione anonima proveniente dalla Mearns Castle School spiega molto chiaramente come il diagramma mostra le due parti della formula:
L'area del quadrato può essere vista in diversi modi. "
La larghezza delle colonne è in successione crescente di 1, 2, 3, 4, 5, 6 quadrati elementari. L'area del quadrato è quindi (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) ^ 2.



Ma possiamo anche considerare il quadrato a partire dall'angolo in alto a sinistra, e vediamo che c'è un quadrato composto da un quadrato elementare (rosso); un totale di due quadrati giallo scuro, che contengono in tutto 8 (= 2 ^ 3) quadrati elementari; 3 quadrati gialli, per un totale di 27 (= 3 ^ 3) quadrati elementari; un totale di 4 quadrati verdi, per un totale di 64 (= 4 ^ 3) quadrati elementari e così via, fino a 6 quadrati per un totale di 6 ^ 3 quadrati elementari. (Quando i quadrati hanno un lato costituito da un numero pari di quadrati elementari, si noti che uno di essi è diviso in due rettangoli uguali).

In altre parole, almeno fino a n = 6, possiamo intuitivamente vedere che i due modi di calcolare le aree del quadrato devono dare lo stesso risultato, ovvero

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) ^ 2 = 1 + 2 ^ 3 + 3 ^ 3 + 4 ^ 3 + 5 ^ 3 + 6 ^ 3$.

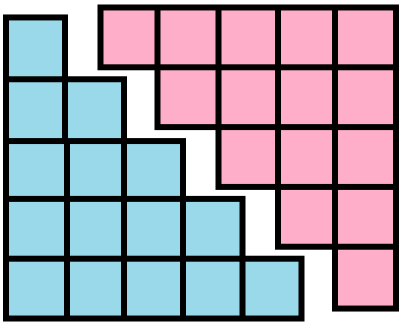
Da cui, nell'ipotesi che non ci sia motivo per il risultato dato di tradirci per valori di n maggiori di 6, segue la risposta alla domanda: la somma dei cubi dei numeri naturali consecutivi è uguale al quadrato della somma (ben nota) dei numeri naturali consecutivi.

4. Altre dimostrazioni intuitive.

Questo risultato è il terzo di una successione di dimostrazioni intuitive di risultati concernenti le somme delle potenze k dei numeri naturali.

I. Somma dei numeri naturali.

Il disegno più ovvio è dato da:



In altre parole, se vogliamo sommare i numeri naturali (prima potenza) da 1 a 5, si possono costruire i due triangoli eguali **azzurro**, in cui i numeri naturali sono collocati a partire da 1 in alto, e quello **rosa,** in cui i numeri naturali sono collocati a partire dal più grande (qui 5), in alto.   Si hanno così 5 file di 6 quadrati, e l'area del rettangolo (30 quadrati) è il doppio della somma cercata.

In definitiva $s_5^{(1)} = \frac{6 \cdot 5}{2}$ o, in generale, la somma dei numeri naturali da 1 a n è data da

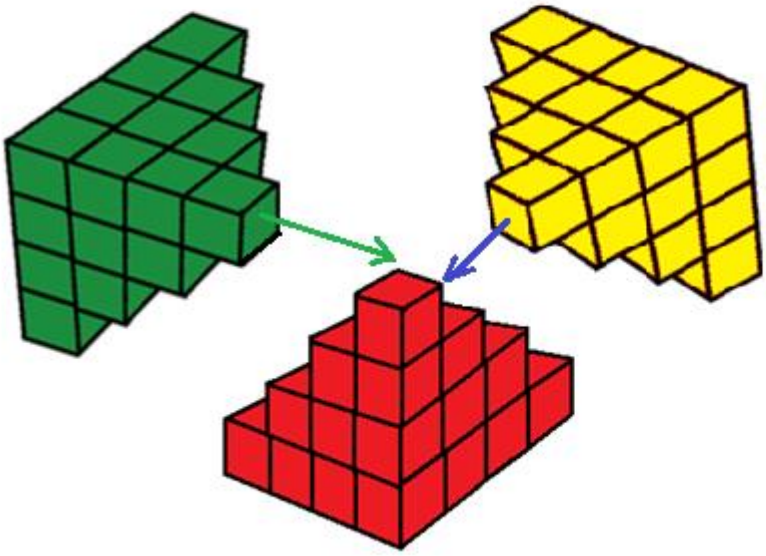
$$s_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

II. Somma dei quadrati dei numeri naturali.

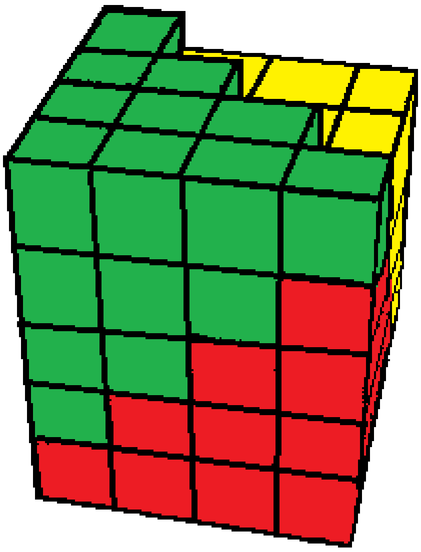
Potrà sembrare strano, ma mi pare chiaro che la somma dei quadrati in modo intuitivo, o, almeno, grafico, sia più complicata di quella dei cubi, che abbiamo già visto.

La prima cosa da ricordare è che un cubo può essere suddiviso in tre tetraedri (non regolari). *Bisogna avere una discreta capacità di pensare in tre dimensioni per arrivarci.*

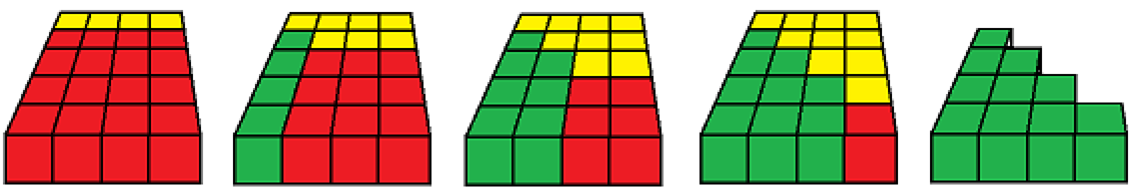
Ad ogni modo vediamo anzitutto tre tetraedri irregolari di eguale forma, ciascuno dei quali conta 4 piani, 16 (=4 x 4) al pianterreno, 9 (=3x 3) al primo piano; 4 (=2x2) al secondo piano, 1 all'ultimo piano. Come si vede, ogni tetraedro è costituito da un numero di cubetti elementari pari alla somma dei quadrati dei numeri da 1 a 4, cioè **30** = 1+4+9+16, ma il più piccolo sforzo di fantasia che richiederò sarà che si accetti che il ragionamento si estenda a n piani, cioè alla somma dei quadrati da 1 a n.



Ora si incastrino i tre tetraedri in modo che i vari piani del quasi parallelepipedo risultante siano composti come indicato nella seguente figura. Si noti che non si tratta di tetraedri regolari, e il risultato non è un parallelepipedo.

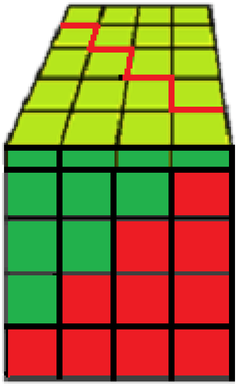


Si noti altresì che l'ultimo piano è occupato solo a metà dai cubetti verdi: il tetraedro giallo non ha un quarto piano. Piano per piano, la disposizione appare come segue:



Pianterreno   1° piano   2° piano   3° piano   4° piano

Ora, questo non è un parallelepipedo, perché il quarto **piano è incompleto.** Per renderlo un parallelepipedo, tuttavia, c'è un semplice trucco. Si dimezzano verticalmente i dieci cubetti verdi dell'ultimo piano, e si spalma la metà dei cubi tolta sull'altra metà del piano, che ha pure dieci posti ed era restata vuota. Insomma, si rinuncia all'attico con terrazza, ma si hanno delle soffitte. A questo punto abbiamo la nostra figura finale dell'ultimo piano, di altezza ½, mentre tutti gli altri sono di altezza 1. Il tracciato rosso indica dove terminavano i cubi vecchi e dove sono disposti i mezzi cubi nuovi.



Parallelepipedo con nuovo quarto piano.

Il volume del parallelepipedo rimane eguale al triplo della somma dei quadrati da 1 a 4, ovvero da **1 a n**, ma i tre lati sono: **n** (qui 4), **n +1** (qui 5) e l'altezza **n+1/2** (qui 4.5).

Abbiamo quindi :

$$3\ s_n^{(2)} = n(n+1)(n+1/2) = \frac{1}{2}[n\ (n+1)(2n+1)$$

$$s_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Questa formula è nota dall'antichità, e esistono diversi altri modi (metodi di induzione, formula di Faulhaber e derivate , formule di ricorrenza, differenze finite e formule derivate etc.) per ritrovarla, ma nessuno così intuitivo come quello appena presentato. Di questo sono grato al sito https://www.youtube.com/watch?v=aXbT37IlyZQ di YouTube, anche se anonimo, il che indica che il metodo fu probabilmente inventato altrove. Ad ogni modo, *Chapeau!,* come dicono i Francesi.

NOTE

(1) Faulhaber, Johann *(Ulm, 1580-1635)*

(2) Bernoulli, Jakob *(Basel, 1655-1705)*

(3) Jacobi, Carl (*Potsdam, 1804- Berlin, 1851***).**

(4) Gauss, Carl Friedrich ("*princeps mathematicorum", Brunswick, 1777-Brunswick 1855).*