MAGLIE E SQUADRE DI CALCIO

(Seguito del “Dialogo sulla Geometria assiomatica”)

MILAN (rosso-neri) LAZIO (bianco-celesti)

Coloro che hanno seguito un corso di geometria analitica elementare avranno notato che Descartes aveva una soluzione per il problema della definizione di punti e rette. Per lui un punto era semplicemente una coppia ordinata di numeri (x,y) , il primo dei quali è l’ascissa, il secondo l’ordinata. E la retta? La retta era identificata da tre numeri (a,b,c), con l’annotazione che i tre numeri potevano essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero, ed avrebbero individuato la stessa retta.
E con questo, il problema della definizione degli enti punto e linea (nel piano) era, o sembrava, soddisfacentemente risolto. Anche Descartes avrebbe potuto risolvere i suoi problemi senza fare un solo disegno che utilizzasse rozzi modelli di rette e di punti. Potremmo dire che questo era un modello di geometria assiomatica, come appunto pensava Hilbert, ma, appunto, nulla più che un modello in una moltitudine.

Vorrei ora spingere ancora più in là l’applicazione dell’opinione di Hilbert che enti qualsiasi (boccali di birra, tavoli e sedie) gli andrebbero bene, pur che rispettino i suoi assiomi. Limitandoci alla geometria del piano, dai suoi assiomi (qui non riportati) possiamo estrarre tre “assiomi di incidenza”, leggi a cui devono soddisfare gli elementi della sua geometria:

1) Per ogni coppia di punti A, B passa una e una sola retta r.
2) Per ogni retta r, c’e (almeno) un punto P che non giace su r.
3) Per ogni retta r e per un punto P che non giace su di essa passa una e una sola retta s sulla quale giace P che non ha alcun punto in comune con r (questa retta s è la parallela a r).

Ogni modello che verifichi questi assiomi è detto “Piano di incidenza affine”, un nome e null’altro.
In altre parole, per rispettare queste tre leggi, che derivano dalla nostra geometria Euclidea, non occorre il piano di Euclide, che è formato da infiniti punti e su cui si

possono tracciare infinite rette. Basta un numero finito di oggetti. Inoltre, non occorre che questi oggetti siano punti e linee.

Credo che, per chi non ci abbia mai pensato, queste affermazioni possano suonare sorprendenti. Ma facciamo ora vedere uno di questi modelli, che con la geometria sembra non aver nulla a che fare. Si tratta del *modello minimo,* il quale consta di quattro oggetti di un primo tipo (A, B, C, D), e sei oggetti di un secondo tipo (a, b, c, d, e, f) per i quali è definita una relazione, che può sussistere o no fra oggetti del primo tipo e oggetti del secondo tipo. Questa sarà la nostra "relazione di incidenza", che abbiamo definito nei tre assiomi di incidenza elencati più sopra. Anche se abbiamo usato parole come "giace" e "passa", si può vedere che queste due parole hanno essenzialmente lo stesso significato e potrebbero essere sostituite dalla sola parola "appartiene (o appartengono)"

Tutto ciò può sembrare troppo astratto, forse, e allora scendiamo subito al concreto: supponiamo di avere la seguente tabella dei colori delle maglie *tradizionali* delle squadre di calcio. I colori che scegliamo sono quattro, e corrispondono agli oggetti del primo tipo; le squadre di calcio sono sei, e corrispondono agli oggetti del secondo tipo. La relazione di incidenza ci chiede se la maglia – *ripeto, tradizionale* - della squadra scelta (in colonna) contiene uno dei quattro colori (in riga).

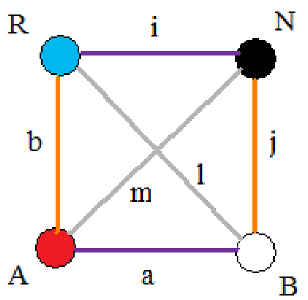
(Una tale tavola si chiama "tavola di incidenza", ma non ci formalizziamo sul nome.)

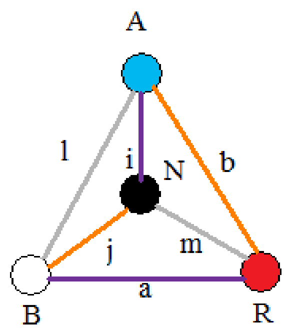
	Juventus	Milan	Bari	Bologna	Lazio	Inter
Bianco	●		●		●	
Nero	●	●				●
Rosso		●	●	●		
Azzurro				●	●	●

Agli incroci della riga "colore" con la colonna "squadra" abbiamo messo un "●" se il colore è presente nella maglia della squadra e niente se il colore non è presente.
Ora si noterà che, ***per la nostra scelta di colori e di squadre***, i tre "assiomi di incidenza" sono rispettati, se per "punti" intendiamo i colori, per "rette" le squadre, e come "incidenza" usiamo la parola "appartenenza".
1) Una sola squadra ha una maglia in cui sono presenti due dati colori. Esempio: il Milan è l'unica squadra con maglia in cui ci siano il rosso e il nero. Diremmo dunque meglio: Ad ogni coppia di punti-colori appartiene una sola retta-squadra. O ancora, "per due punti passa una sola retta".
2) Almeno un colore non compare nella maglia di una data squadra. Esempio: la maglia del Bologna non contiene il bianco (e neanche il nero). Diremmo meglio: ogni retta-squadra non appartiene ad un punto-colore (almeno) . O ancora, "data una retta, abbiamo almeno un punto fuori di essa".

3) Per ogni retta-squadra e un punto-colore che non compare nella maglia della detta squadra, c’è una e una sola retta-squadra sulla cui maglia compare quel colore e che non ha punti-colori comuni con la maglia della retta-squadra in questione. Questa è detta la “parallela”. La Juventus risulta quindi “parallela” al Bologna, il Milan alla Lazio etc. O ancora “data una retta e un punto fuori di essa , c’è una sola retta che passa per quel punto e non ha punti comuni con la retta data”.
Per giungere a questo risultato, bisogna notare che: 1) la maglia della Juventus ha il Nero in comune con Milan ed Inter (il Nero corrisponde al punto di incidenza o intersezione di Juve e Milan, Juve e Inter); 2) la maglia della Juventus ha il bianco in comune con Bari e Lazio. Resta solo una retta squadra con cui la Juve non ha colori in comune, ed è il Bologna.
Inoltre, come si è visto, due squadre non parallele hanno uno e un solo colore in comune. Questo colore è l’intersezione delle due squadre. Esempio: Lazio e Bologna si intersecano nell’Azzurro (sembra quasi il titolo di una canzone).
Questa dunque è la nostra geometria. Che poi possa servire a migliorare il gioco del calcio in Italia ne dubito.

Ogni tipo di relazione definita da una tabella come la nostra ha lo stesso modello geometrico, il “modello minimo”, che contiene in tutto quattro punti e sei rette. Il modello è “minimo” in quanto non si può costruire un modello che soddisfi ai tre “assiomi di incidenza” con meno di quattro punti e sei rette (qualunque cosa questi oggetti siano).
Si tratta di una “geometria finita” il cui modello può essere disegnato in diversi modi. Due esempi:





Le linee dello stesso colore sono parallele. Nel diagramma di sinistra, le due linee grigie (l, m) sembrano incontrarsi, ma il punto di incrocio non fa parte della nostra geometria, che ha solo i quattro punti A, D, C, D. Quindi possiamo dichiarare che le due rette sono parallele, perché non hanno in comune punti riconosciuti come tali dalla nostra geometria.

Si possono dare altri insiemi di assiomi ed altri modelli di “geometrie finite”.

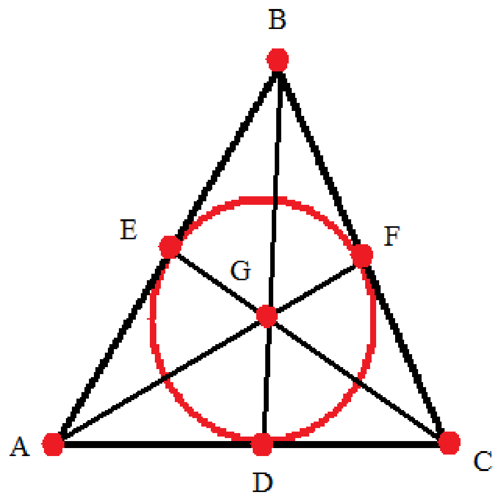
Accenno ad un esempio, che i lettori volonterosi potranno esplorare a loro piacere. Supponiamo di sostituire gli assiomi del piano affine a quello euclideo con assiomi della geometria proiettiva. Come sappiamo, la differenza più appariscente è che in geometria proiettiva due rette hanno sempre un punto in comune, sia esso ordinario o all'infinito. Inoltre, assiomi e teoremi della geometria proiettiva (del piano) hanno la simpatica caratteristica della dualità, cioè un assioma/teorema valido può essere trasformato in un secondo assioma/teorema altrettanto valido semplicemente scambiando fra loro le parole punto e retta. Ciò che è sorprendente è che anche la dimostrazione del teorema duale rimane valida, scambiando le parole punto e retta nel corso della dimostrazione.

Se si vuol fare un modello finito di questa geometria, quattro punti non bastano più e ne occorrono almeno sette. Possiamo prevedere che, per avere dualità completa, in ogni modello occorrerà un numero di rette eguale a quello dei punti. Se ci accontentiamo di sette punti e sette rette, *il minimo,* abbiamo l'ingegnoso "Piano di Fano" (Gino Fano fu un matematico Italiano), un oggetto apparentemente semplice, che qui mi limito a disegnare in forma geometrica, lasciandone l'esplorazione a chi lo desidera. Si noti che a ogni punto "appartengono" tre rette e ad ogni retta "appartengono" tre punti. Possiamo anzi elencare sei nuovi assiomi di incidenza che identificano il modello di Fano .

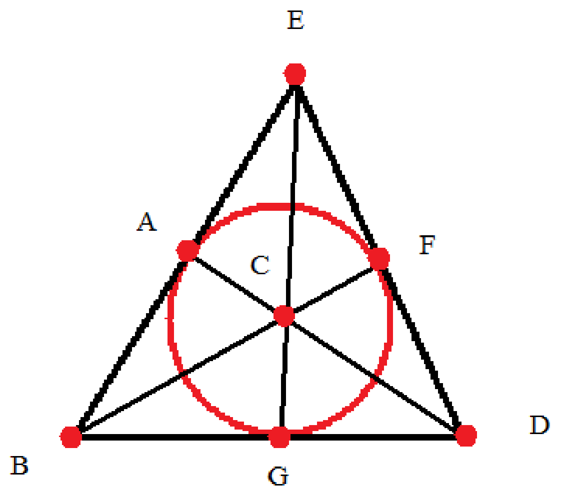
1. ogni retta del piano ha almeno tre punti;
2. per ogni punto del piano passano almeno tre rette;
3. per ogni coppia di punti passa una e una sola retta;
4. ogni coppia di rette si incontra in uno e un solo punto;
5. ogni retta del piano ha al massimo tre punti;
6. per ogni punto del piano passano al massimo tre rette.

I nostri tre assiomi di incidenza sono dunque diventati sei assiomi diversi? No, perché vediamo che qui "scatta la dualità". I nostri sei teoremi sono tre coppie di teoremi duali l'uno dell'altro.

Si noti che i tre punti E, F, D appaiono su una linea che noi non chiameremmo retta, ma piuttosto circolo. Bene, per chi accetta questa geometria con questi assiomi – la retta EFD è una retta esattamente come le altre. Bisogna dunque notare che la rappresentazione data nel diagramma è assai imprecisa, perché dà l'impressione che il punto G sia in mezzo, in posizione privilegiata, e la retta EFD sia un cerchio.



Il sistema è perfettamente duale: sette punti, sette rette; tre punti per retta, tre rette per punto. Non ci sono rette parallele (tutte le rette si incontrano a coppie – in realtà in terzetti - in uno e un solo punto). Potete dilettarvi a costruire la “tavola di incidenza”, sette per sette. E poi potete ribattezzare i sette punti del diagramma come volete mantenendo le stesse “incidenze”, per esempio come ho fatto in figura qui sotto. Ora il sistema ha le stesse proprietà, ma G non è più in centro e EFD è diritta come piace a noi (ma AGF ora è un cerchio).



Visto così, uno si può chiedere, come il solito, a che serva tutto ciò. Ora, il piano di Fano è sorprendentemente ricco di applicazioni, che però riguardano i matematici. Quindi ho appena dischiuso la porta su un giardino che ha i suoi cultori. Il giardino, comunque, non è chiuso a chiave, è aperto per tutti coloro che vi sono interessati. Coraggio, l’ingresso è gratuito.