LA FUNZIONE ZETA DI RIEMANN
E I NUMERI PRIMI

Tentativo a carattere euristico e non rigoroso di presentare un soggetto di cui si parla molto e molto non si sa

Destinato a matematici “in motoretta”
Nella speranza di non metterli del tutto fuori strada.

I Edizione

Bernhard Riemann (1826-1866)

LA FUNZIONE ZETA DI RIEMANN
E I NUMERI PRIMI

Un brano di fantamatematica, in quanto si tenta di entrare nella mente di un eccelso matematico del passato. Per matematici "in motoretta" (II anno di matematica anni 1960).

Bibliografia generale:

Articolo originale di Riemann:
B. Riemann: Sul numero di numeri primi inferiori ad una data quantità.
Bernhard Riemann: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*.
(19. Oktober 1859). In: *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 1860, S. 671–680.

Libri divulgativi:

H.M. Edwards: Riemann's Zeta Function, Dover Publications Inc., NY, USA

T. Mosconi: l'Ipotesi di Riemann (Versione 0.07, 2011). Il libro, che ha (o ebbe) la gradevole caratteristica di essere gratuitamente accessibile in rete, nella parte più direttamente legata all'ipotesi di Riemann è in taluni passi la diretta traduzione dall'inglese del testo di Edwards. Sono però aggiunte di verse pagine che facilitano la comprensione dei calcoli. Inoltre gran parte del libro offre interessanti excursus sulla teoria dei numeri. Da leggere assolutamente.

INTRODUZIONE

Devo confessare che fino al 31 maggio 2018 il titolo di questo saggio era. "La congettura/ipotesi di Riemann". Poi mi sono accorto che quello che presentavo era solo un tentativo di spiegare l'unico articolo stampato da Riemann sui numeri primi, nel tentativo di dimostrare il cosiddetto Teorema dei Numeri Primi, una sorta di sfida lanciata cinquant'anni prima dal matematico Gauss, che aveva proposto due approssimate, ma relativamente semplici funzioni matematiche che asintoticamente avrebbero dovuto eguagliare il numero di numeri primi inferiore ad un dato n, noto come $\pi(n)$.

Bernhard Riemann, è un nome, penso, ignoto ai più, perché non ha lasciato aneddoti curiosi, non ha sommato a cinque anni i numeri da uno a 100, non scriveva su margini di libri con troppo poco spazio, non è morto in duello, lamentandosi di avere poco tempo per completare l'opera, e – peggio ancora - morì a quarant'anni recitando con la famiglia il Padre Nostro, ma non arrivò alla fine ("*et ne nos inducas in tentationem*" o qualcosa di simile in tedesco). (Per i matematici italiani in vena di pellegrinaggi scientifici, dirò che è sepolto a Biganzolo (Verbania)).

Uno studente universitario incomincia però a incontrare Riemann verso la fine del secondo anno di un buon corso di Analisi (penso nelle equazioni di Cauchy-Riemann, alle basi dell'analisi matematica nel campo complesso), e continua ad imbattersi in lui se prosegue negli studi di matematica o fisica (il "Tensore di Riemann" domina per esempio la Relatività Generale). Ci si convince allora di aver incontrato un sommo matematico, che pose le basi di diversi nuovi campi della matematica, tra cui quello in cui ci imbatteremo ora, la "*Teoria analitica dei numeri*".

Sui numeri primi, Bernhard Riemann pubblicò in tutta la sua vita circa nove pagine - non di facile lettura, non del tutto rigorose, e ricche di "misteriose" affermazioni, nel 1859. Come scrisse nella sua introduzione, aveva deciso di studiare i numeri primi, sulla scia di quelli che lui stimava i grandi matematici della generazione precedente alla sua, Gauss e Dirichlet, che a questo problema si erano interessati. Ma le nove pagine stampate sono, a quanto pare, solo la punta di un iceberg di documenti manoscritti sul soggetto, che Riemann non pubblicò. Come Galois, Riemann, minato dalla tbc, sapeva di non avere molto tempo a disposizione. È difficile, quindi, avere un'idea di quali risultati avesse Riemann raggiunto nel contempo, e ogni illazione è pericolosa.

Da quanto ho capito, da modesto dilettante, l'articolo di Riemann è ben strano. Si propone di dimostrare il teorema dei numeri primi menzionato più sopra, ammette di non esserci riuscito, e intanto propone un'approssimazione più complicata, ma assai più precisa delle due approssimazioni proposte da Gauss. Inoltre, strada facendo propone una formula ancora più precisa, che tira in ballo gli "zeri" di una certa funzione nel campo complesso, l'ormai celebre funzione Zeta, che da lui prende il nome. E poi, in mezzo a una selva di idee nuove, di risultati ottenuti in modo non rigoroso e via dicendo, scodella la sua "ipotesi", che questi zeri, nel campo complesso, siano tutti collocati su una certa retta parallela all'asse immaginario, con parte reale = ½. Ma si affretta a dire subito che questa ipotesi, che lui dice di aver brevemente tentato di dimostrare senza riuscirvi, non gli serve per dimostrare quello che intende dimostrare (cioè il teorema dei numeri primi) e l'abbandona subito. D'altra parte, Riemann non ritiene di aver dimostrato il teorema dei numeri primi, cioè, pur avendo creato una formula che per quanto ne sappiamo dà quasi esattamente la successione dei numeri primi, non ritiene di aver dimostrato che la sua formula sia "asintoticamente" eguale a $\pi(n)$.

Molte delle affermazioni da lui fatte furono dimostrate da altri in seguito. Ma non è detto che l'ipotesi di Riemann permetta di determinare tutti i numeri primi uno dopo l'altro, o anche singolarmente, con assoluta precisione. Ho letto che non è ancora stato indicato un solo numero primo trovato grazie all'ipotesi di Riemann (2018).

Le conseguenze della correttezza dell'Ipotesi di Riemann si estendono a campi della matematica estremamente avanzati, ma, viste in questa luce, non sembrano garantire che ci troviamo davanti al più importante problema non risolto di tutta la matematica, come amano dire gli Americani, aggiungendo magari "di tutti i tempi".
Inoltre, molti dei divulgatori che ho letto, pur introducendo gli zeri della funzione di Riemann, dimenticano la famosa ipotesi, e non ci dicono quali vantaggi apporterebbe ai già notevoli risultati ottenuti da Riemann.
Cercherò di evitare questi trabocchetti, e di spiegare il poco che capisco io di questo famoso problema.

I. PARTE PRIMA: SI PREPARA LA SCENA

Da *sempre* gli infiniti numeri primi tormentano l'umanità. In certo senso sono quegli elementi che impediscono all'*aritmetica* di essere una scienza banale, anche se i suoi rudimenti vengono appresi in prima elementare o ancor prima. In *geometria*, ad esempio, i punti di un piano sono tutti anonimi. Si cambia l'origine, e i valori x, y, la *residenza* del punto, che è tutto quello che sappiamo del punto, cambiano con essa. In aritmetica, invece, ogni singolo numero intero ha un'identità, una sorta di *codice fiscale*, dato dalla sua unica scomposizione in fattori primi: unica per il numero e unica nel senso che nessun altro numero ha la stessa scomposizione in fattori primi.

Da secoli si cerca senza successo di trovare una regolarità nella loro distribuzione. Niente da fare, i numeri primi sembrano proprio succedersi perversamente a caso – o quasi. Ci sono magari intervalli di dieci, venti numeri successivi senza un solo numero primo, e poi, di colpo, ne arriva una coppia che stanno più vicini possibile, cioè la cui differenza è 2, come 17 e 19, 29 e 31 e infinite altre coppie. Più vicini ancora sono solo il 2 e il 3, ma il 2 è l'unico numero primo pari e il caso non si ripete più.

Noterò di frequente in margine le nozioni che assumo che il lettore conosca. Le note e dimostrazioni verranno date eventualmente, in future appendici (un paio le metto su questo testo). Ma non ci si scoraggi se sembrano essere richieste nozioni di matematica fuori della portata del lettore: una scorsa al testo la si può dare anche senza andare nei dettagli, qualche nozione viene comunque chiarita, e un'idea non troppo vaga del lavoro di Riemann sui numeri primi, congettura/ipotesi inclusa, la si può forse estrarre lo stesso. Questo, almeno, è ciò che spero.

Nozioni necessarie a questo punto:

i) Esistono infiniti numeri primi.

ii) La scomposizione di un numero non primo in fattori primi è unica.

iii) Nozione di funzione , in questa prima parte, funzione di "variabile reale". Si tratta di una legge che, dato il valore di una "variabile indipendente x", *in qualche modo* assegna alla "variabile dipendente y" o *funzione*, un dato valore: per esempio, la funzione $y = x^3$, se noi assegniamo alla x il valore 2, ci dice che la funzione $y = 2^3 = 8$)

Si noti per inciso che per buoni motivi *il numero 1 non è considerato un numero primo*: è il primo numero, ma non è numero primo. Introdurre 1 come numero primo, distruggerebbe idealmente un pilastro della teoria dei numeri, quello dell'unica scomposizione di un numero in fattori primi (vedi (ii), sopra). Ad esempio, 2 diventerebbe anche 1 x 2 o 1x 1 x 2 eccetera. Non sarebbe gravissimo, ma a molti matematici l'idea non piace.

E' chiaro tuttavia che marciando verso l'infinito i numeri primi si fanno sempre più rari, pur essendo infiniti in numero. Se facciamo un diagramma a gradini del numero totale dei numeri primi inferiori ad un dato numero n, per esempio 100, troviamo il diagramma in figura 1.

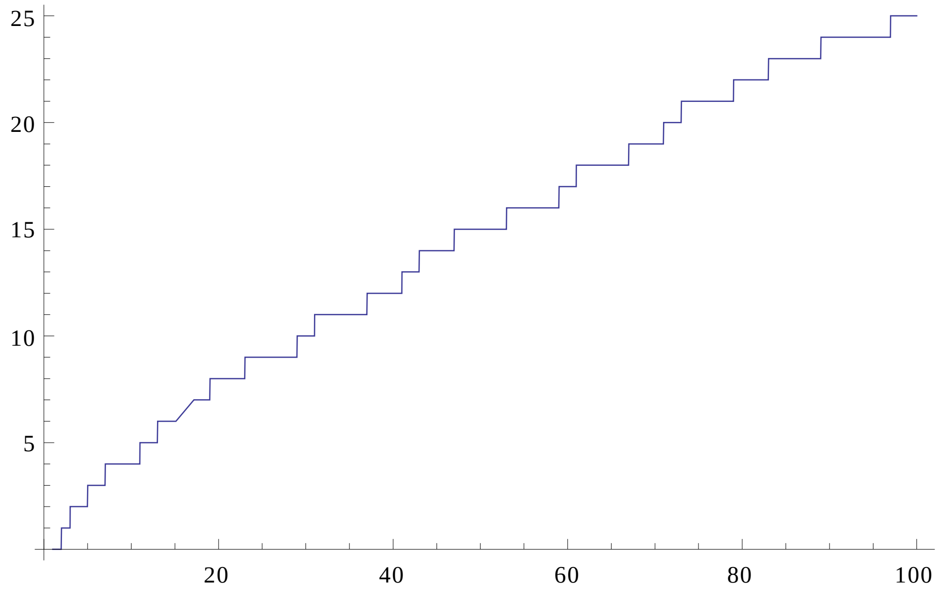


Fig.1

Per quanto a gradini di lunghezza irregolare, la curva, **nota come π(n) (in ordinate)** anche se il numero π , il famoso pi greco, non c'entra AFFATTO, vista da lontano sembra abbastanza regolare (figura 2).

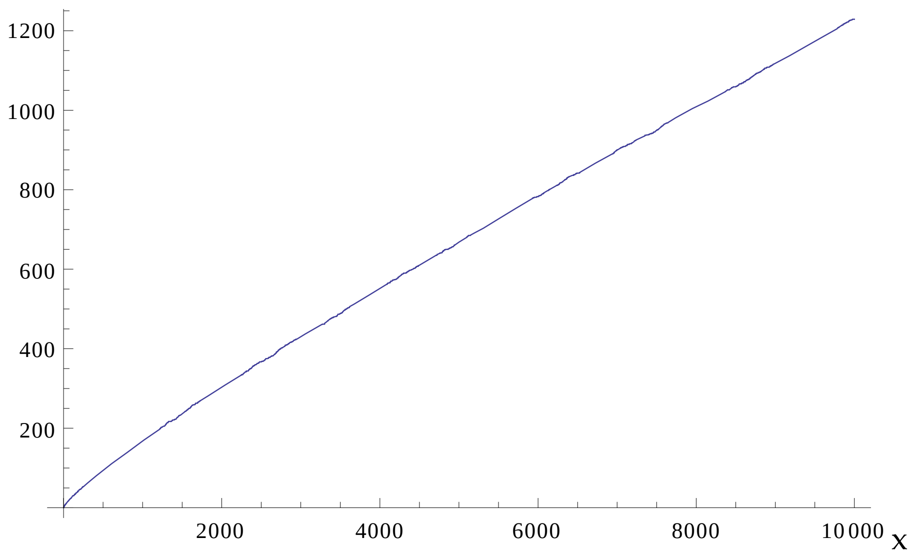


Fig.2

Si tratta, naturalmente , di una "funzione", in quanto, assegnato un valore della variabile indipendente x, il valore della variabile dipendente π (x) viene ottenuto contando i numeri primi tra 0 e x, estremi inclusi. Questa non sarebbe però una "formulazione analitica", come era $y = x^2$. Noi giungeremmo al valore di π (x) solo contando con cura il numero di numeri primi fra 0 e x *caso per caso.* Per ora non si è trovata altra via.

Gauss pensò che, se non si poteva dare una formulazione "analitica" della curva in un colpo solo, per lo meno si poteva dire a che cosa questa curva assomigliasse senza andar troppo per il sottile. In realtà, sperava anche che, per x molto grande, diremmo "asintoticamente", la curva potesse assimilarsi ad una funzione nota.

Nozione da possedere: *diagrammi esponenziali e logaritmici.* Questi sono essenziali se si vogliono fare diagrammi che coprono un grande intervallo di valori delle variabili. Il lettore curioso che non conosce il trucco può provare *a non usare* un diagramma logaritmico per Fig.3, e vede subito che cosa succede.
Asintoticamente: in questo caso lo scarto **relativo** (cioè diviso per x) di π (x) – f(x), dove f(x) è la funzione nota desiderata, dovrebbe tendere a zero per x tendente ad infinito. La parola "relativo", come vedremo, è importante.

La "funzione nota" balza agli occhi se noi facciamo un diagramma della "spaziatura media" dei numeri primi. Questa è data dal rapporto fra n ed il numero di numeri primi minori di n, per intenderci n/π (n) . Per esempio, tra 1 e 10 ci sono 4 numeri primi (spaziatura media 10/4=2.5) e tra 1 e 100 ce ne sono 25 (spaziatura media 4). Come dicevamo, la spaziatura media fra numeri primi cresce, cioè i numeri primi si diradano, al crescere del loro valore. *Ma si noti che stiamo utilizzando un diagramma logaritmico: il punto essenziale è che questa spaziatura, in funzione del logaritmo di n, si dispone praticamente su una retta.*

Nozione utile, ma non indispensabile: uso del metodo dei minimi quadrati (in questo caso usato per determinare la retta che passa "più vicina" a punti che non sono precisamente allineati)
Nozione necessaria: ln(n), il logaritmo naturale di n, definito come

$$n = e^{\ln(n)}.$$

Nozione utile, ma non indispensabile: La funzione "Logaritmo Integrale" di x: in fondo basta la definizione. Per Wikipedia è:

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(y)}\,dy$$

Dunque, se il diagramma di questa "spaziatura media" viene fatto su scala logaritmica si vede che, tra 100 e 10000000, otteniamo una retta, in particolare una parallela alla funzione ln(n). Quindi il numero di primi inferiori a n sarebbe π (n) = n/ln(n). Ad esempio, la spaziatura media vale 4 per n inferiore a 100, e quindi il numero totale di numeri primi inferiore a 100 sarebbe, e per caso esattamente è, 25.

Il matematico Adrien Legendre (1752-1853), forse non immaginando che dopo duecento anni si sarebbero scomposti con potenti computer numeri di cento cifre, propose che il numero di primi minori di n sia *n/(ln(n)-A)*, essendo A una certa costante vicina ad 1. Lui conosceva, alla fine del sec. XVIII, i conteggi dei numeri primi fino a 400 000 e, presumo, eseguì un'interpolazione con il metodo dei minimi quadrati, di cui era stato uno degli inventori, trovando A=1.08366 (non si sa con precisione come questo numero sia stato calcolato, ma se si prova a farlo a mano, si vede che ci si va vicino.).

Legge di Legendre:

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln(n) - 1.08366}$$

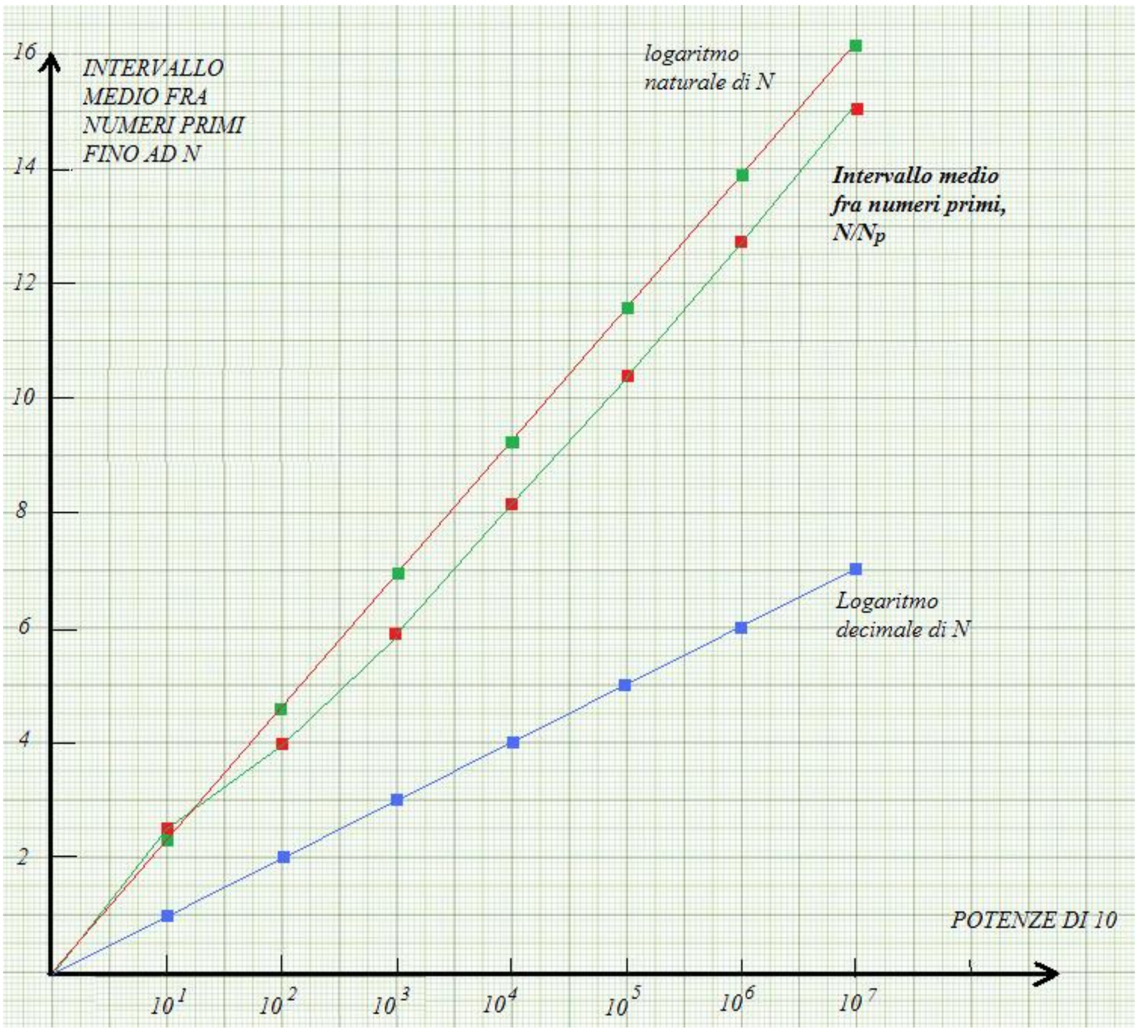


Fig.3

Gauss, non si sa bene se andando per tentativi o in base a qualche ragionamento a noi ignoto (si disse che "*come la volpe, con la coda cancellava le sue tracce*"), propose anche una funzione affine, il cosiddetto **logaritmo integrale ("euleriano")** di n, cioè Li(n) (invece di *n/ln(n)*). Secondo altri, il suggerimento gli venne da Dirichlet (1838).

Congettura di Gauss:

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

Dove:

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2) = \int_2^x \frac{1}{\ln(y)}\, dy.$$

(Noto che Li(x) = li(x) - li(2), dove li(x) è il logaritmo integrale usuale, con limite inferiore 0 invece che 2, per evitare una singolarità che compare nel punto 1, in cui li(x) = - ∞. Si veda Wikipedia per un grafico. Dato che comunque 1 non è un numero primo, questo uso non crea problemi).

Le due curve Li(x) e x/ln(x) si assomigliano, come si vede dalla Fig.4 (diagramma fatto utilizzando Wolfram's **Mathematica**).

Incidentalmente, la legge empirica di Legendre fu dimostrata essere sbagliata, la costante fu dimostrata essere 1, e l'insieme fu presto dimenticato: si vede subito che per numeri primi enormi, quali ne esploriamo oggi coi calcolatori elettronici, la costante a denominatore diventa insignificante. Non lo sarebbe se la legge fosse esatta, ma qui Legendre stesso era ben conscio del fatto che il suo metodo dei minimi quadrati era stato inventato proprio per dare la migliore approssimazione di diagrammi approssimati.

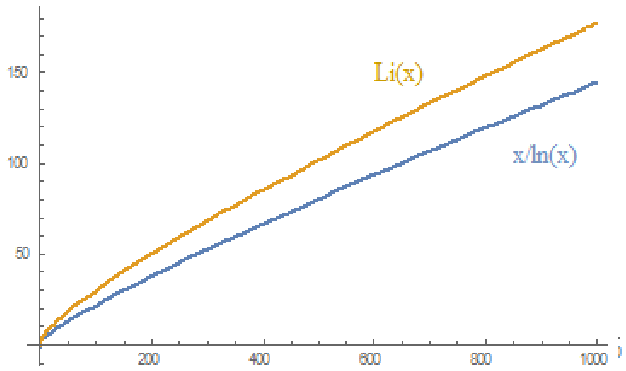


Fig.4

Per ora non occorre formalizzarsi. Per quel che ci riguarda, la funzione Li(x) era stata studiata e opportune tavole della funzione esistevano, o almeno si sapeva come calcolarle. Si vede subito che effettivamente c'è una forte somiglianza fra le curve Li(x) e $\pi(x)$ (Fig.5). Inoltre, si vede che la curva del logaritmo integrale (curva azzurra) sembra essere, almeno per n < 10000, maggiore della π(n) – curva rossa.

Ma in teoria dei numeri abbondano le sorprese e non bisogna mai fidarsi né di quello che si calcola per pochi esempi, né di quello che si vede su brevi (!) diagrammi. In effetti, nel 1914 il matematico inglese F. E Littlewood dimostrò che a un certo punto il logaritmo integrale incrocia la $\pi(x)$. Il punto di incrocio è la *costante di Skewes*, una delle costanti più grandi utilizzate nella matematica, che vale circa 10^{316}, se si assume come vera la congettura di Riemann (che vedremo a suo tempo).

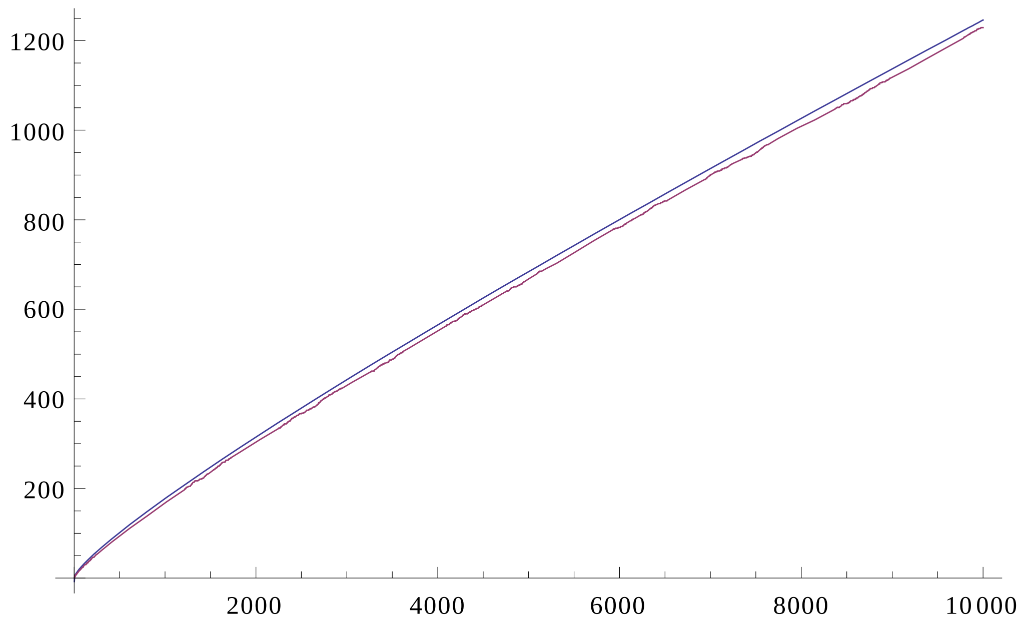


Fig.5

E' chiaro che se la funzione n/ln(n) o anche Li(n) desse un'interpolazione esatta noi non avremmo altro da fare che vedere *dove questa funzione assume valori vicino agli interi* (ricordiamo che si tratta di un conteggio di numeri primi, non di frazioni di numeri primi), e per quel valore dell'argomento sapremmo qual è il numero primo e che posto occupa nella serie. Per esempio, n/log(n) vale 17.0145 per n = 73 e difatti 73 è un numero primo. Tuttavia non è il diciassettesimo, essendo invece il ventunesimo. La confusione aumenta man mano che si procede, e poi già sappiamo che coppie di numeri primi la cui differenza è 2 continuano a presentarsi fino all'infinito, o almeno, così si crede – un bel teorema non ancora dimostrato, ma che rovina la nostra proposta .

Dimostrare che per valori di *n* molto grandi *π(n)* si avvicina asintoticamente a *n/ln(n)* o anche *Li(n)* divenne il cosiddetto "teorema dei numeri primi", che Gauss non dimostrò, ma lasciò ai posteri. Fu eventualmente dimostrato a fine ottocento (indipendentemente, nel 1896, da Hadamard e da de la Vallée Poussin).

Si pensa che nel suo unico lavoro sui numeri primi Riemann volesse dimostrare appunto il teorema dei numeri primi e, pur restando insoddisfatto del suo lavoro, certo introdusse molte idee nuove di zecca per la dimostrazione, e molte altre le tenne nascoste nei suoi manoscritti. A prima vista, a mio vedere, il risultato di Riemann "sembra" dimostrare il teorema e valutare anche i termini correttivi. Tuttavia, una dimostrazione rigorosa Riemann non riuscì a darla.

Nozione indispensabile: significato del simbolo "di Sommatoria"
$\sum_{n=1}^{M} F(n) = F(1) + F(2) + F(3) \dots$, che si legge, "somma dei valori consecutivi che la funzione F(n) assume facendo variare n da 1 a M. Il simbolo può essere adattato con qualche ovvia mutazione. Un esempio è comunque dato di seguito.

II. EULER SULLA SCENA: ARRIVO DELLA FUNZIONE ZETA E DELLA SUA RELAZIONE CON I NUMERI PRIMI

Un predecessore di Riemann, Leonardo Euler/Eulero (1707-1783), altro mostro della matematica, che tra l'altro era un calcolatore prodigio, si era dilettato a studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

già nota ai suoi tempi come "serie armonica", H.

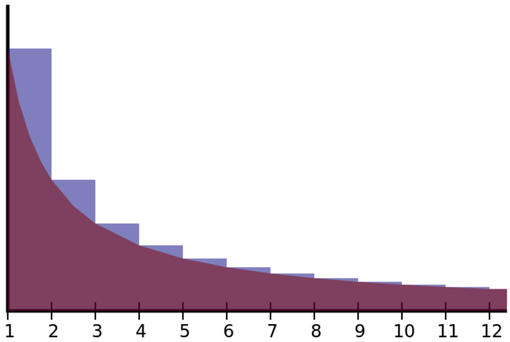
Già si sapeva che la somma di questa serie vale infinito. Questo lo si vede quasi subito. Si mettano da parte i primi due termini, la cui somma è 3/2. Il terzo e il quarto danno una somma superiore a 2/4 (=1/2), perché 1/3 è maggiore di ¼. Così pure, 1/5+1/6+1/7+1/8 danno una somma maggiore di 4/8 (=1/2), perché i primi tre termini sono tutti maggiori di 1/8. Vediamo cioè che prendendo in considerazione un numero di termini crescente, e sempre doppio del precedente, noi continuiamo ad aggiungere alla nostra somma dei contributi maggiori di ½. Ma chi ci può fermare? Andando all'infinito noi aggiungeremmo infiniti termini superiori a ½, il che significa che la somma della nostra serie armonica vale infinito.

È, come direbbe un matematico, un infinito pigro, ma pur sempre un infinito: voi mi dite un numero M grande a piacere ed io posso dirvi dopo quanti termini, magari un numero enorme, il numero M viene superato (ad esempio ci vogliono 100000 termini per arrivare a un valore della serie = 12.09). Questa serie, quindi "non converge", cioè "diverge", cioè va all’infinito, anche se con lentezza esasperante.

Una sorpresa , che qui menziono soltanto, è che la serie diverge logaritmicamente. All’infinito avremo che

$$\lim_{n\to\infty} H(n) = \ln(n) + \gamma$$

Dove γ è una costante, la costante di Eurler-Mascheroni, che è piccola (= 0.577211) tanto che viene naturale chiederci perché non valga esattamente zero. Un indizio del perché lo si vede dalla seguente figura.



L’area della regione blu converge alla costante di Euler-Mascheroni. Ci si deve pensare un momento, per ricostruire la figura. Ad esempio 1+1/2+1/3, riportati nel diagramma, vanno sommati e alla loro somma va sottratto il valore ln(3).

Se però invece di sommare gli inversi dei numeri interi sommiamo gli inversi dei loro quadrati (“Problema di Basilea”, città natale di Euler), la serie non ha un valore infinito, ma “converge”, e vale 1.6449, cioè $\pi^2/6$, come fu dimostrato da Euler più volte, in più modi, quasi tutti non rigorosi - a partire dal 1735 (e qualcuno potrebbe giustamente chiedersi chissà cosa c'entra il pi greco. Chi se lo chiede è sulla retta via della matematica). Egli provò dunque che

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Lo studioso che ha voglia di fare esperimenti noterà che la somma degli inversi dei numeri dispari è maggiore della somma degli inversi dei numeri pari (perché?). Il filosofo invece noterà che qui non ci sono cerchi che tengano, e quindi, anche in uno spazio curvo, la somma darebbe lo stesso risultato, con esattamente lo stesso pi greco. Per me è difficile credere, davanti a un tale risultato, che il pi greco sia un prodotto della nostra mente e non abbia una sua esistenza separata, anche se con caratteristiche differenti dalla nostra.

Eulero considerò anche altri esponenti s per i denominatori. D'ora in avanti considereremo questa somma come una funzione dell'esponente s, dandole il nome che le diede Riemann, di funzione ζ(s), leggi "Zeta di s". Insomma, voi mi dite l'espponente, e io vi dico il valore della Zeta.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \qquad s > 1.$$

Aumentando l'esponente s , la serie converge sempre meglio, producendo risultati sempre più vicini a 1, per s>1. Questo è ovvio, perché i termini successivi a 1 sono sempre più piccoli. Per esempio, per s=100, il primo termine dopo 1 è 2^{-100}, un numero che ha una trentina di zeri prima della prima cifra significativa dopo 1.

Calcolando i valori brutalmente (e magari interpolando) troviamo il seguente diagramma, che evidentemente tende a infinito per valori di s tendenti a 1 e tende a 1 per valori grandi di s:

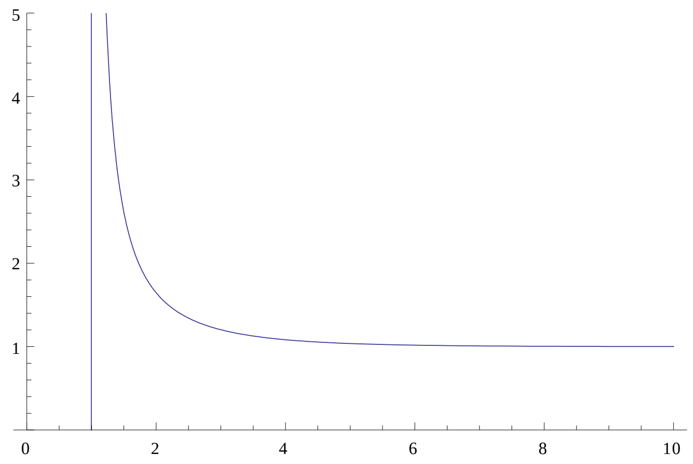


Fig.6

E' inutile spingersi più a sinistra: la funzione è infinita per valori di s inferiori a +1. Un matematico preferirebbe forse dire "la serie non ha più senso per valori di s < 1", sfumatura che lascia una porta aperta, dentro cui si precipitò Riemann.

Requisito essenziale: Somma della serie geometrica, in particolare nozione del fatto che

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \ldots \quad (x<1)$$

Se proprio non si sa dove cercare si veda, in questo sito, "Il

paradosso di Zenone" pag.6, e di nuovo in appendice.
http://dainoequinoziale.it/sassolini/2016/09/29/Zenone.html

Altro **requisito utile,** comprensione del simbolo del prodotto (analogo alla Sommatoria)

$$\prod_{x=1}^{M} f(x) = f(1)f(2)f(3)\ldots f(M)$$

Euler ebbe un'altra pensata (1737). La serie Zeta nasconde un legame con i numeri primi e può essere scritta come prodotto che coinvolge i soli numeri primi:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\ldots}$$

Per vedere come il procedimento funziona, sia per semplicità s =1. La funzione può essere scritta come un prodotto di serie geometriche (tutti i termini oltre allo 1 sono inferiori a 1), e quindi , (i) prima scrivendo ogni serie geometrica che deriva da un fattore, (ii) poi eseguendo i prodotti

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)\cdot\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Cioè ne segue il risultato quasi miracoloso che, partendo da una PRODOTTO INFINITO che conteneva solo numeri PRIMI, otteniamo una serie Zeta di tutti i numeri INTERI, (con esponente s, se tutti i termini avessero tale esponente, che qui abbiamo posto eguale a 1), grazie al fatto che eseguendo il prodotto otterremo una volta sola *tutte* le combinazioni di numeri primi con tutti gli esponenti possibili, *e ogni combinazione corrisponde ad un unico numero intero* (unica scomposizione in fattori primi di un numero intero).
Nell'esempio scelto otteniamo la serie armonica, che, sfortunatamente, diverge.

Ma questo esempio ci offre un risultato non privo di interesse: anche la serie degli inversi dei soli numeri primi diverge.
Questo lo si prova, non rigorosamente, osservando che:
$\sum_{n\ intero} \frac{1}{n} = \prod_{p\ primo} \ (1-p^{-1})^{-1}$, come si è appena visto, da cui: $\ln\left(\sum_{n\ intero}\frac{1}{n}\right) = -\sum ln\ (1-p^{-1})$, ma la serie logaritmica per x < 1 , come è noto a chi è noto, vale $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\ldots)$, cioè, nel nostro caso
$\ln\left(\sum_{n\ intero}\frac{1}{n}\right) = \sum\frac{1}{p}$ +1/2$\sum\frac{1}{p^2}$+1/3$\sum\frac{1}{p^3}\ldots$.
Ma da un lato sappiamo $\sum_{n\ intero}\frac{1}{n}$ diverge (come ho notato, come ln(m) per m tendente all'infinito) mentre dal problema di Basilea deduciamo che a partire da $\sum\frac{1}{p^2}$ i termini convergono:

Infatti, se converge la somma degli inversi dei quadrati degli interi, a maggior ragione convergerà la somma degli inversi dei quadrati dei numeri primi, che sono solo una piccola parte degli interi, o una sua frazione. Similmente, se converge la somma degli inversi dei quadrati degli interi, a maggior ragione convergeranno le somme degli inversi dei cubi e potenze superiori degli interi. La parte divergente sarà quindi confinata al primo termine $\sum \frac{1}{p}$,che se ne andrà all'infinito come ln (ln (m)) per m tendente all'infinito. La divergenza è lentissima, ma esiste. Poiché però converge la somma degli inversi dei quadrati degli interi, ne deduciamo che i numeri primi sono più frequenti dei quadrati degli interi, un risultato a mio parere controintuitivo.

Se poi si prende il logaritmo di questa funzione, dato che il logaritmo di un prodotto è dato dalla somma dei logaritmi dei singoli fattori e inoltre

$$ln\left(\frac{1}{n}\right) = -ln(n)$$

abbiamo il risultato che:

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - 1/p^s)$$

Di qui tireremo fuori con qualche artifizio una funzione che alla fine ci darà π(n).

Ma che c'entrano gli "zeri", cioè i valori di s per cui la funzione Zeta si annulla?
Qui evidentemente Riemann cercò di applicare alla ζ(s) una quarta pensata di Euler (1748).

Questi sapeva che un polinomio della forma per esempio

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

con b e c razionali (per cui essi possono esser stati divisi per un eventuale coefficiente a di x^2, se era diverso da zero) può essere scritto come

$$P(x) = x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)$$

dove r_1 ed r_2 sono le radici dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$.

O anche come,

$$P(x) = x^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left(\frac{x}{r_1} - 1\right)\left(\frac{x}{r_2} - 1\right) = r_1 r_2 \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)\left(1 - \frac{x}{r_2}\right)$$

Con opportuni accorgimenti per le radici doppie e i segni, simili formule valgono anche per polinomi di grado qualsiasi maggiore di 2. Ma Euler non si fermò ai polinomi.
La sua idea fu che, se di una funzione a variabile reale noi conosciamo gli zeri, probabilmente si può creare una funzione prodotto affine a quella valida per i polinomi, magari con infiniti termini, se ci sono infiniti zeri.

Credo che la prima funzione a cui Euler applicò questo procedimento sia stata *sin(x),* i cui zeri erano arcinoti, e sono dati dai multipli interi, positivi e negativi, di π, come si vede anche dalla figura.

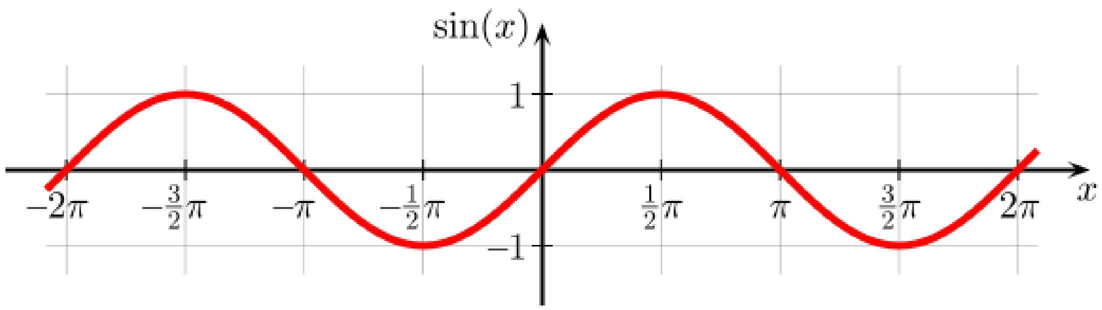


Fig.7

Euler non andava per il sottile e ai suoi tempi non si badava tanto alla "convergenza" delle serie e dei prodotti. Semplicemente si guardava se le formule ottenute un po' alla garibaldina dessero il risultato voluto o no. E quindi Euler *congetturò* una funzione che avesse gli stessi (infiniti) zeri della funzione seno.

Il suo risultato, senza andare troppo per il sottile, diciamo "euristicamente", è il prodotto:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Come lo si può indovinare? Gli zeri di sin(x) sono x =0, ±π, ±2π, ±3π, per cui ci si aspetta una eguaglianza del tipo di

$$\sin(x) = (x- 0)(x+ \pi)\ (x- \pi)\ (x+ 2\pi)\ (x-2\pi)\ (x+ 3\pi)\ (x-3\pi)\ldots$$

Nella sua prima soluzione del cosiddetto problema di Basilea, cioè dimostrare che

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

a Euler bastò dire che

$$\sin(x) = (x- 0)(x+ \pi)\ (x- \pi)\ (x+ 2\pi)\ (x-2\pi)\ (x+ 3\pi)\ (x-3\pi)\ldots \Rightarrow$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=C(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\ldots$$

(vedi le manipolazioni per l'equazione di secondo grado) e quindi i due membri dovevano essere la stessa funzione, PERCHÉ AVEVANO GLI STESSI ZERI, a somiglianza di quanto avveniva con i polinomi, che erano identici (a meno di una costante) se avevano gli stessi zeri. Che gli zeri del prodotto a secondo membro siano rimasti gli stessi con le manipolazioni fatte, è evidente. Ma è altrettanto evidente che ciò non basta. Passare dalla formula euristica ad una formula rigorosa, non è banale. Per questo rimando al testo del Mosconi, che mi sembra il più "user friendly". Ad ogni modo si noti quanto meno che la costante C che abbiamo dovuto porre all'inizio del prodotto vale 1, perché tale è il limite per x tendente a zero della funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ (che gli increduli applichino la regola di De l'Hopital!) e per x =0 tutti i termini del prodotto valgono 1.

Per il mio modesto lavoro introduttivo basta sapere quello che bastò a Euler nel 1735 per dimostrare per la prima volta il "problema di Basilea", e, naturalmente, basta sapere che la formula da lui proposta è corretta ed è considerata una delle più "belle" formule della matematica. Non solo, ma oggi sappiamo che esiste un teorema che assicura che "ogni funzione intera" (cioè analitica, ovvero infinitamente differenziabile nell'intero piano complesso) può essere fattorizzata in simile modo (Teorema di fattorizzazione di Weierstrass, 1876).

Si tratta, a pensarci bene, di un risultato stupefacente: basta conoscere TUTTI gli zeri di una funzione nel campo complesso (cioè tutti i punti in cui si annullano tanto la parte reale quanto la parte immaginaria della funzione), e l'intera funzione, per complicata che sia (anche se soggetta a certe restrizioni), viene TOTALMENTE ricostruita.

II. ENTRA IN SCENA RIEMANN: ARRIVANO ANCHE GLI ZERI DELLA FUNZIONE ZETA

Visto lo stretto legame fra la funzione zeta e i numeri primi, espresso dalla

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-1/p^s)$$

e considerata la formula che dava la funzione sin(z) in funzione dei suoi zeri, Riemann deve essersi chiesto se fosse possibile ricavare la $\zeta(s)$ in un altro modo, ad esempio,

usando il legame tra la funzione e i suoi zeri, e paragonando le due formule trovare, chissà, qualche preziosa informazione sui numeri primi.
Riemann avrebbe dunque voluto trovare una:

$$\zeta(s) = \zeta(0) \prod (1 - s/\varrho_i)$$

dove ϱ_i è lo i-esimo zero della funzione Zeta e il prodotto coinvolge tutti gli zeri.
Il primo termine è una costante, a cui diamo il nome di $\zeta(0)$, perché se mettiamo 0 al posto di s, otteniamo il valore 1 per tutti i fattori del prodotto.

Prendendo il logaritmo dell'equazione così ottenuta, non ci sarebbe stato altro da fare che scrivere:

$$ln(\zeta(0)) + \sum \ln\left(1 - \frac{s}{\varrho_i}\right) = -\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

dove la prima somma è su tutti gli zeri della funzione Zeta, e la seconda sulle potenze s di tutti i numeri primi.

Ecco che finalmente gli zeri sono arrivati nel quadro. Occorre che gli zeri siano semplici eccetera eccetera. Ma intanto avremmo una formula che lega gli zeri della funzione Zeta ai numeri primi e spiega l'interesse degli zeri della funzione Zeta per coloro che studiano i numeri primi.

Se la cosa avesse funzionato, Riemann avrebbe potuto trasformare opportunamente il membro di destra in modo da coinvolgere la $\pi(n)$ e magari anche il membro di sinistra in modo da renderlo più maneggevole.

Ma Riemann si rese subito conto del fatto che la formula ideale sopra indicata non serviva a nulla. Il problema era: "Dove sono gli zeri della Zeta?". Infatti, se guardiamo il diagramma in Fig.1, di zeri non ce ne sono. Come se non bastasse, la serie di Eulero con s=0 produceva la serie armonica, con il bel risultato che

$$ln\ (\zeta\ (0)) = Infinito,$$

che rovinava tutto.
Infatti l'inverso di un numero naturale elevato alla potenza zero dà 1 e quindi la serie di Eulero diventava la somma di infiniti termini 1. (Un lettore non curioso di acrobazie di matematica può accontentarsi di guardare il diagramma in Fig.1).

Requisito essenziale: qualche nozione fondamentale delle funzioni di variabile complessa

Fortunatamente Riemann aveva un asso nella manica, perché lui era uno dei fondatori della teoria delle funzioni di variabile complessa. La variabile s poteva benissimo essere una variabile complessa (lui pose $s = \sigma + it$, notazione che ci è rimasta in eredità) e gli zeri della funzione $\zeta(s)$ potevano essere benissimo sparpagliati sull'intero piano complesso. Per questo occorreva che la Zeta fosse definita sull'intero piano complesso, il che complicava le cose, ma non era cosa da spaventare Riemann. Naturalmente non era garantito che questi zeri esistessero: ci sono funzioni che non hanno zeri in tutto il piano complesso, e una la incontreremo tra non molto.

Intanto però incominciamo a vedersi profilare l'opportunità di una congettura su come gli zeri della funzione Zeta siano disposti sul piano complesso. Se gli zeri fossero disordinatamente sparpagliati avremmo decisamente un problema in più. Invece, come vedremo, un certo ordine c'è, o almeno si spera che ci sia, ciò che è la sostanza della "congettura di Riemann".

Riemann dovette dunque anzitutto costruire una funzione che fosse identica alla serie studiata da Eulero per valori reali di s >1, ma avesse significato, cioè producesse numeri non infiniti, ed avesse un solo valore, per tutti i punti del piano complesso (Riemann stesso avrebbe poi spiegato il da farsi per funzioni che non hanno un solo valore, ma questo non si rivelò necessario per la Zeta). Estendere la funzione sul piano complesso non era difficile utilizzando la stessa serie, ma solo a patto che la parte reale di s fosse maggiore di 1. Al di là, cioè per valori della parte reale di s ≤ 1, erano le terre inesplorate. La funzione Zeta è dunque un oggetto che ha una sua espressione (per ora ignota) e una sua validità generale sul piano complesso, mentre la serie

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \dots$$

è una sua rappresentazione che vale solo per Re(s) > 1.
Allo stesso modo la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 \dots.$$

rappresenta per -1< x< 1, cioè solo su un trattino dell'asse reale, la funzione

$$1/(1 - z)$$

che invece è valida sull'intero piano complesso, con una singolarità, detta "polo", nel punto z = 1.

Il problema, Riemann lo abbordò a pagina 1 del suo articolo e ne diede una prima soluzione in mezza pagina. Usò a questo scopo una forma particolare del procedimento di "continuazione analitica", basandosi su un'altra funzione esplorata da Euler (e cinque!), cioè la funzione Gamma o *Γ(s)*, che sull'asse reale interpola il fattoriale (*n! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5…x (n-1)*) e lo continua sul piano complesso. Per evitare talune confusioni di notazione, invece di Γ(s) io utilizzerò la funzione *s Γ(s) = s!*, intendendo che s può assumere qualsiasi valore, anche non intero, anche non reale. E noterò qui *en passant* che questa funzione è una di quelle che non hanno zeri su tutto il piano complesso.

La continuazione analitica della funzione Zeta, Riemann la calcolò in due modi:
1) Anzitutto sviluppando la funzione *(s-1)!*. Questo sviluppo gli suggerì il secondo procedimento, di
2) sviluppare la funzione *(s/2-1) !*
Noi ci contenteremo di vedere dove *finisce* questa seconda strada, evidentemente preferita da Riemann, che ci dà in un colpo solo l'estensione della funzione ζ(s), una sua importante proprietà, detta di riflessione, ed introduce una nuova funzione che magicamente contribuirà alla soluzione del problema.

Il risultato è l'equazione I

$$\left(\frac{s}{2}-1\right)!\ \pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = F(s, 1\text{-}s) - \frac{1}{s(1-s)}$$

Ciò che più ci importa a questo livello non è la forma della funzione F(s, 1-s) a secondo membro, ma il fatto che tanto la *F(s,1-s),* di cui Riemann ricavò un'espressione in forma integrale, quanto il termine $-\frac{1}{s(1-s)}$ restano invariati per lo scambio di *s* con *(1-s)*. Quindi anche il termine a primo membro deve godere della stessa proprietà di invarianza.

Moltiplicando i due membri per $\frac{s}{2}(s-1)$, espressione anch'essa invariante per lo scambio s, 1-s,
e notando che $\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-1\right)! = \left(\frac{s}{2}\right)!$ Riemann ottenne la funzione che lui battezzò $\xi(s)$, prodotto di termini tutti invarianti per scambio di s con 1-s

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)!\ \pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

Qui il termine scritto in rosso è appunto già invariante per lo scambio di s con 1-s (come da Equazione I). Notando che $\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-1\right)! = \left(\frac{s}{2}\right)!$ la funzione $\xi(s)$ diventa

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{2}\right)!(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

E, essendo il prodotto di termini tutti invarianti per lo scambio di s con 1-s, gode della proprietà :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

Vorrei ora fare un'escursione che, credo, Riemann poté fare nel suo prodigioso cervello, e noi possiamo fare oggi grazie a mezzi di calcolo adeguati. Per questo ho utilizzato il programma, "Wolfram-Mathematica", che riesce talvolta a rendere la matematica una sorta di scienza sperimentale. Essendo in grado di calcolare immediatamente diagrammi di funzioni sul piano complesso, noi possiamo vedere con i nostri occhi il prodigio che si compie.

Come è noto, non si può fare un diagramma perspicuo di una funzione complessa di variabile complessa. Avremmo infatti bisogno di due diagrammi, entrambi sul piano complesso, uno per la parte reale e uno per la parte immaginaria della funzione. Tuttavia, il valore assoluto della funzione, ottenuto sommando il quadrato della parte reale al quadrato della parte immaginaria, è un'unica funzione, sempre positiva, di cui possiamo fare un diagramma sul piano complesso. Se una funzione è simmetrica lo è anche il suo valore assoluto ; inoltre, dal modulo si vedono anche gli zeri ed i "poli", cioè i punti in cui la funzione assume valore infinito.

Ecco dunque il diagramma del valore assoluto di $\left(\frac{s}{2}\right)!$ in funzione della variabile complessa (σ+it).

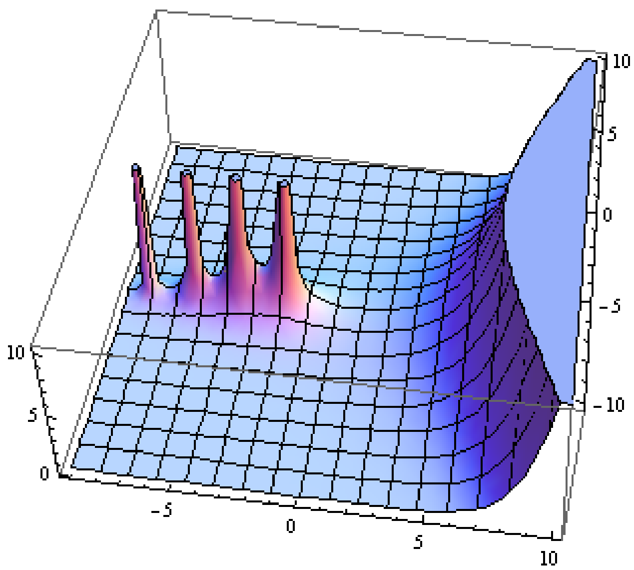


Fig.8

Ed ecco il diagramma del valore assoluto della funzione ζ(s):

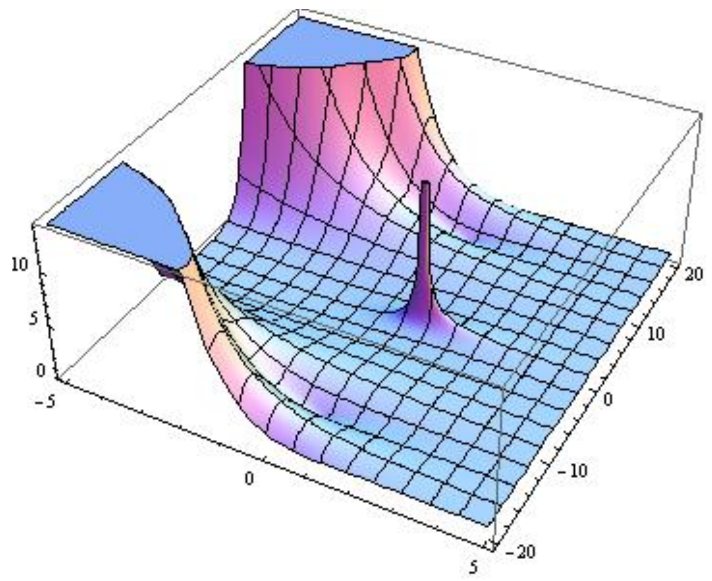


Fig.9

Il prodotto di queste due funzioni moltiplicate ancora per $\pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)$
è secondo me stupefacente.
Ho fatto il diagramma dell'inverso del valore assoluto perché si possano vedere due picchi, cioè due zeri del valore assoluto, e due verruche, allineate con essi, che rappresentano due picchi sottilissimi e sono anch'essi due zeri del valore assoluto.

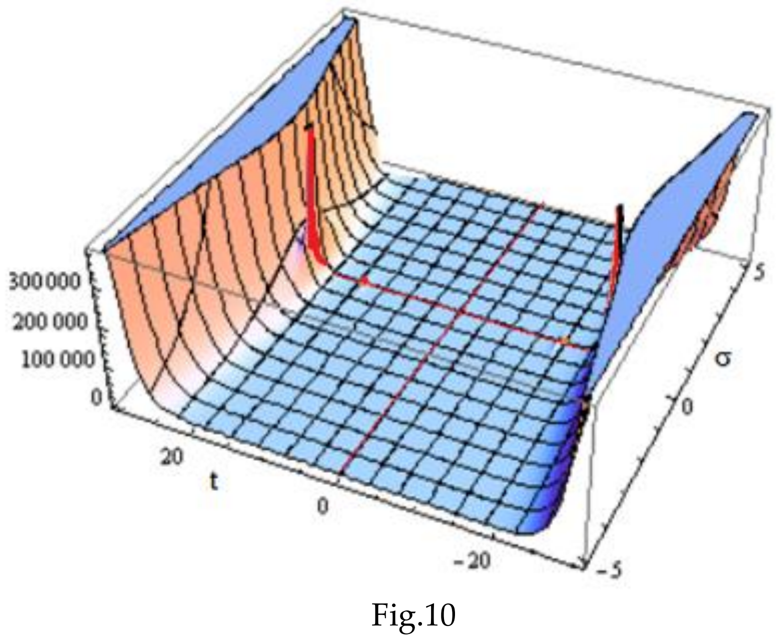


Fig.10

Questa funzione appare doppiamente simmetrica, tanto rispetto all'asse t=0 quanto rispetto alla retta σ =1/2. Come le parti reali ed immaginarie delle quattro funzioni che compaiono nel prodotto possano cospirare per produrre una funzione simmetrica a tal punto ha per me del meraviglioso.

III. MA CHE C'ENTRANO GLI ZERI DELLA ZETA CON I NUMERI PRIMI?

Il programma è che noi ricostruiamo la funzione zeta in base ai suoi zeri, e la zeta così ricostruita ci dica dove sono i numeri primi.

Ciò che vorrei fare adesso è quindi mostrare in modo più preciso come gli zeri della funzione entrino nel calcolo di un'approssimazione alla π(n).

La prima cosa che notiamo è che l'equazione

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

ci permette di estendere la nostra funzione Zeta anche a valori di Re (s) ≤ 1.

Infatti l'equazione di riflessione di ξ(s) permette di scrivere una relazione per la ζ(s) valida su tutto il piano (buttando a mare il rigore matematico).

Basta per questo scrivere

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

nella forma

$$\left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \left(\frac{1-s}{2}\right)!\,(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

E ricavare

$$\zeta(s) = \left(\frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)!\,(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}}\right)\zeta(1-s)$$

E tanto potrebbe bastare, per uno che disponga di mezzi di calcolo adeguati.
Se vogliamo conoscere ζ(-11), valore sinora proibito, ci basta conoscere ζ (12), valore permesso. Tutti i termini del fattore che moltiplica ζ(1-s) hanno significato e quindi il valore è calcolabile, e abbiamo ζ(-11)= 0.02109.
Su questa base, mediante un programma del tipo di Mathematica, possiamo estendere il nostro diagramma di Fig.3 a sinistra di s=0, ottenendo:

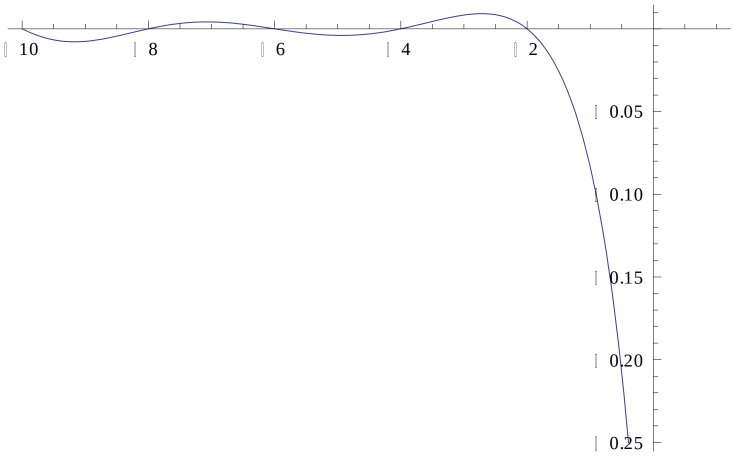


Fig.12

in cui spiccano gli "zeri" nei punti -2, -4, -6 etc, cioè per s=-2n..

Noto a questo punto un celebre paradosso, che si spiega rapidamente osservando che non si può estendere impunemente il valore di una serie oltre il dominio in cui essa converge. Infatti, guardando il diagramma o consultando opportune tavole, si trova che $\zeta(-1) = -1/12$. Ma $\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$, d'onde il paradosso (che, come abbiamo visto, è facilmente confutabile.

Gli Zeri nei punti s = - 2n continuano all'infinito, ma non si creda che la funzione Zeta per grandi valori negativi di Re(s) sia una funzione di tutto riposo. Si veda lo spettacoloso diagramma in 3D della parte reale della Zeta, con tutte le valli e picchi, di cui forse una parte è dovuta alla larghezza delle maglie della rete, che tra l'altro non permettono di vedere gli zeri della funzione. E, naturalmente, questo incredibile labirinto è tutto ricavabile dalla sola conoscenza degli zeri della funzione.

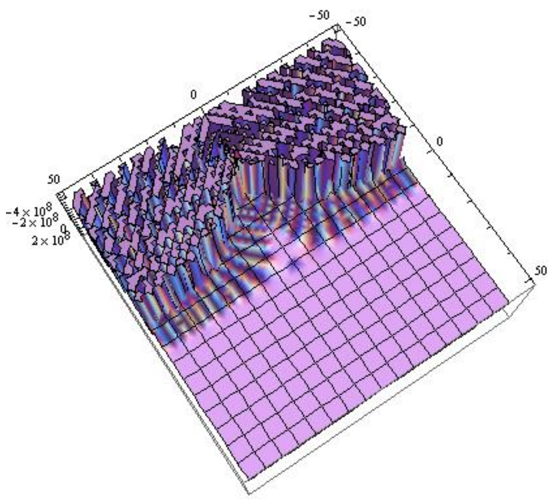


Fig.13

Questo comportamento e la posizione dgli zeri sono dimostrati dal diagramma della funzione sull'asse reale continuandolo fino a valori di s = -30.

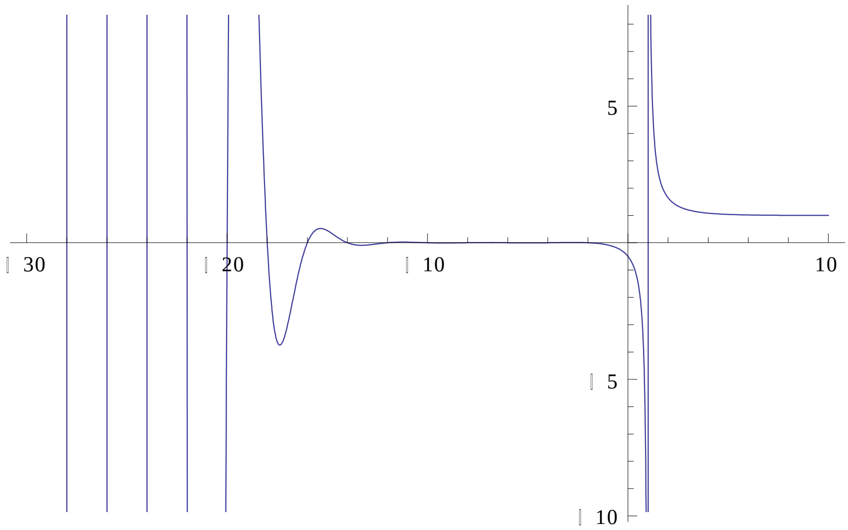


Fig.14

Ma questi zeri non ci servono. Se ci fossero solo loro, il prodotto che cerchiamo avrebbe la forma:

$$\zeta(s) = \zeta(0?)(s+2)(s+4)(s+6)\ldots$$

che chiaramente diverge per s maggiore di 1, dove invece abbiamo visto che la funzione vale circa 1. Dunque questi zeri, che si trovano banalmente, non solo sono banali, ma sono addirittura nocivi agli scopi di Riemann.

Diverso è il caso della funzione $\xi(s)$. Dalla sua forma

$$\xi(s) = \left(\frac{s}{2}\right)!\,(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

e sapendo che la funzione Gamma di Eulero o la sua affine fattoriale non hanno zeri in tutto il piano complesso, la ξ sembra averne uno solo in s=1, oltre agli zeri della funzione Zeta, ovunque essi siano. Ma non tutti: la funzione $\left(\frac{s}{2}\right)!$ ha dei picchi di valore infinito nei punti in cui la variabile s/2 assume valori interi negativi, e quindi proprio dove *s* assume valori pari negativi, cioè dove la ξ vale zero.

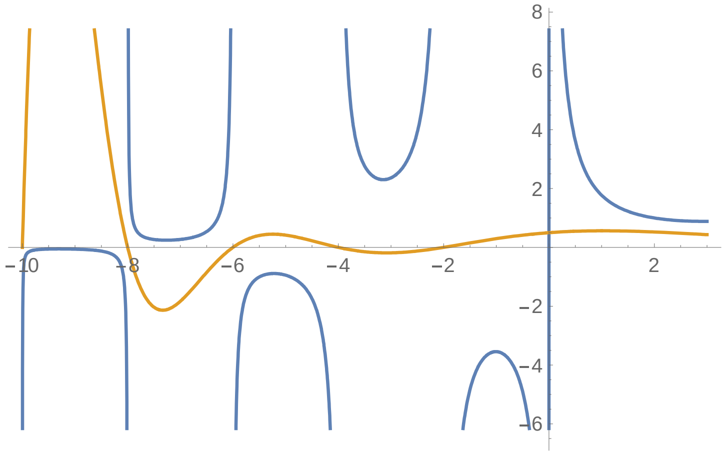


Fig.15

In questa figura 15 ho separato i due fattori che compaiono nella $\xi(s)$, cioè (s/2)! (in blu) e tutto il resto (ocra): si vede che gli infiniti della (s/2)! sono situati nelle posizioni degli zeri banali e magicamente li cancellano, di modo che alla funzione $\xi(s)$ restano solo gli "zeri non banali", che, ovviamente, non compaiono in questa figura, che ci dà la funzione sul solo asse reale. Lo stesso avviene per lo zero in s = 1 che risulta dal fattore (s-1), separatamente cancellato dal polo della $\zeta(1) = \infty$. Ho detto magicamente, perché non sempre gli zeri cancellano i poli: occorre che siano soddisfatte determinate condizioni.

Prendendo i logaritmi naturali dei due membri ed eseguendo una sottrazione troviamo:

$$ln\zeta(s) = \ln\xi(s) - ln\left(\frac{s}{2}\right)! - ln(s-1) - \frac{s}{2}\ln(\pi)$$

Ma dove possiamo trovare il valore della funzione $\xi(s)$? Nella formula precedente , la $\xi(s)$ è definita in base alla $\zeta(s)$. E' inutilizzabile, perché sarebbe un po' come un cane che si morde la coda. Qui però Riemann tornò al suo proposito iniziale ed affermò nel suo lavoro (ma una dimostrazione corretta arrivò soltanto dopo più di trent'anni) che la funzione $\xi(s)$, diversamente dalla $\zeta(s)$, può essere sviluppata come desiderato:

$$\xi(s) = \xi(0)\prod\left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right)$$

O anche:

$$\ln\xi(s) = ln\xi(0) + \sum ln\left(1 - \frac{s}{\rho_i}\right)$$

dove ρ_i sono gli zeri della funzione $\xi(s)$, che corrispondono agli zeri "non banali" della funzione $\zeta(s)$, gli altri zeri essendo inutilizzabili. Si utilizzi l'equazione che esprime $\xi(0)$ a pag.26. Dal diagramma della Zeta vediamo che $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Inoltre (0)! vale 1, π^0 vale 1, e quindi $\xi(0) = \frac{1}{2}$.

Naturalmente, la posizione degli zeri della funzione $\xi(s)$ assume ora un'importanza cruciale. Ma dall'espressione di *ζ(s)* come prodotto ricaviamo che la funzione può assumere valore zero (con Re(s) >1) solo se uno dei fattori

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)}=\frac{p_i^s}{p_i^s-1}$$

vale zero, ciò che per Re(s) > 1 non avviene mai. Dunque niente poli a destra della retta parallela all'asse Immaginario Re(s)=1. D'altra parte uno zero a sinistra dell'asse immaginario, mettiamo in - 0.1, si rifletterebbe in 1- (- 0.1)=1.1, a destra della Re(s)=1. Quindi, niente zeri al di fuori della striscia compresa fra le rette Re(s)=0 e Re(s) =1.

Eguagliando le due espressioni per il lnζ(s) si mette in evidenza come gli zeri "non banali" della ζ(s) siano connessi alla distribuzione dei numeri primi. Come?
Abbiamo due espressioni per il logaritmo naturale della funzione zeta di Riemann, che inevitabilmente devono risultare eguali.

La prima espressione è

$$ln\zeta(s)=-\sum\ln\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)$$

su cui occorre lavorare un poco per ottenere una forma che coinvolga la nostra π(x), la funzione che "conta" i numeri primi.

La seconda espressione è

$$ln\zeta(s)=\ln\xi(s)-ln\left(\frac{s}{2}\right)!-ln(s-1)-\frac{s}{2}\ln(\pi)$$

in cui sostituiamo la

$$\ln\xi(s)=ln\xi(0)+\sum ln\left(1-\frac{s}{\rho_i}\right)$$

ottenendo

$$ln\zeta(s)=ln\xi(0)+\sum ln\left(1-\frac{s}{\rho_i}\right)-ln\left(\frac{s}{2}\right)!-ln(s-1)-\frac{s}{2}\ln(\pi).$$

Lavorando sulla prima espressione si può ottenere un'espressione della somma al membro di destra in termini di una funzione J(x) imparentata con la $\pi(x)$.

La funzione J(x) emerge direttamente dallo sviluppo in serie dei vari addendi $\ln\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)$.

Potrò eventualmente mostrare (non dimostrare) come si giunge al risultato, utilizzando due funzioni "improprie", aborrite dai matematici ed usate gioiosamente dai fisici, cioè la funzione gradino U(x - a) e la sua derivata, la funzione $\delta(x)$. Il risultato è l'equazione:

$$ln\zeta(s)=s\int_0^\infty J(x)\,x^{-s-1}\,dx$$

J(x) è una funzione a gradini che fa un salto di 1 ad ogni numero p_i, un salto di ½ ad ogni numero p_i^{2s}, un salto di 1/3 ad ogni numero p_i^{3s}, dove p_i è l'i-esimo numero primo (Appendice I, p.39).

Per s =1 e x = 26 la funzione quindi appare come:

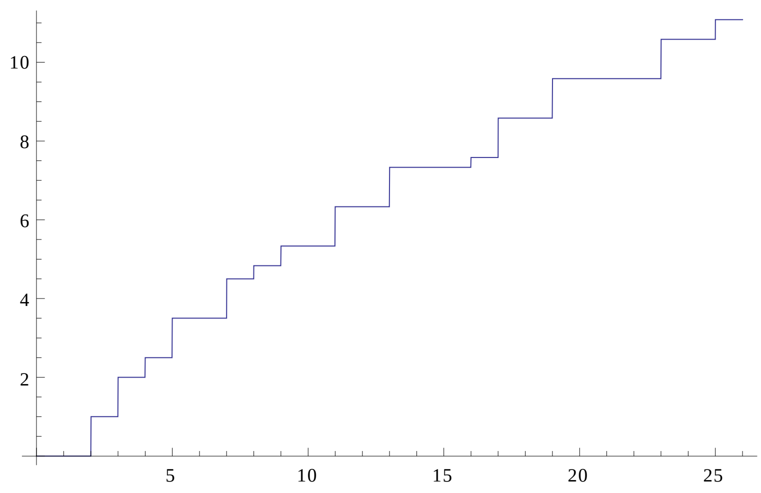


Fig.15

Vi si riconoscono i salti di valore 1 per i numeri primi; quelli di valore ½ per x=4, x=9 e x=25 (quadrati di numeri primi); quello di valore 1/3 per x=8 (cubo di numero primo); quello di valore ¼ per x=16 (quarta potenza).

Ma a noi la J(x) interessa solo fino a un certo punto: noi vogliamo la $\pi(x)$, che è, per così dire, la J(x) ripulita da tutti i gradini di altezza minore di 1.

Un metodo per ottenere la $\pi(x)$ esiste ed è basato sulla considerazione che:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\,\pi\left(x^{1/2}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{1/3}\right) + \ldots$$

Per credere a questa equazione, si può notare che per ogni valore di x, J(x) non è altro che un numero, non un diagramma. Il numero, la somma dell'altezza dei gradini fino a x, è dato dalla somma del numero di numeri primi inferiori ad x a cui si aggiunge ½ moltiplicato per il numero di numeri che sono quadrati dei numeri primi inferiori a x, a cui si aggiunge 1/3 moltiplicato per il numero di numeri che sono cubi di numeri primi inferiori ad x, etc. Dato un certo valore di x, per esempio 26, vediamo che ci sono nove numeri primi (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23), tre quadrati (quelli di 2,3,5), un cubo (2^3 = 8) ed una quarta potenza (2^4 = 16). Soltanto i numeri primi inferiori alla radice quadrata di x (=

5.1) sono presenti con dei quadrati, soltanto i numeri primi inferiori alla radice cubica di x (=2.96) sono presenti con dei cubi, e via dicendo. Via dicendo, ma non tanto: vediamo subito che per x=26 mancherà il termine $\pi(x^{1/5})$, perché la radice quinta di 26 è inferiore a 2, e quindi non esiste alcun numero primo la cui quinta potenza sia inferiore a x. Questa somma, dunque, ha un numero di termini finito per qualsiasi x finito. In altre parole, calcolando le varie radici 1/n, ed aumentando n, si giunge a un valore tale che $x^{1/(N+1)} < 2$, il più picolo dei numeri primi, per cui $\pi(x < 2) = 0$. N dunque si definisce automaticamente: tutti i termini $\pi\left(x^{1/m}\right) + \ldots$ per m >N sono nulli. In effetti, alcuni testi estendono la sommatoria all'infinito, considerando che i contributi a J(x) a partire da N+1 sono nulli. Nel nostro caso specifico, per x = 26, N = 4.

Per ottenere la $\pi(x)$ dalla J(x), si pratica la cosiddetta "inversione di Moebius" (Vedi una versione per "matematici ciclisti" in Appendice II, pagina 41). Questa ci dice che

(i) $$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2} J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3} J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5} J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6} J\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \ldots$$

Verifichiamo intanto quanto valgono i due membri per x=26. A sinistra abbiamo $\pi(x) = 9$; a destra abbiamo $J(x) - \frac{1}{2} J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3} J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 9$, non male.

I coefficienti di destra sembrano disposti in modo capriccioso. Se dovessimo elencare i primi 20 coefficienti, ciò che ci porterebbe a numeri primi dell'ordine di $2^{20} \approx 1000000$, avremmo, per la successione dei numeri interi:

1, −1, −1, 0, −1, 1, −1, 0, 0, 1, −1, 0, −1, 1, 1, 0, −1, 0, −1, 0,...

Sembrano numeri messi a caso, ma, sorprendentemente, essi possono essere compresi da un'unica formula, una funzione numerica **μ(n), detta funzione di Moebius**, che si presenta come segue:

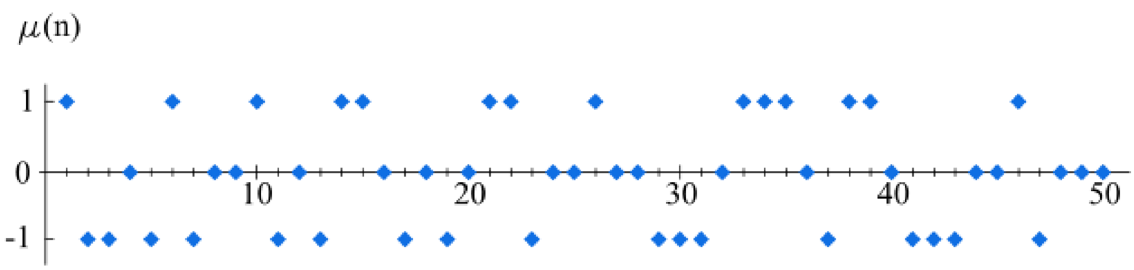


Fig.16

Essa vale:

- $\mu(1) = 1$,
- $\mu(n) = 0$ se n contiene nella sua scomposizione in fattori primi un quadrato (o qualsiasi potenza di un numero primo);
- $\mu(n) = 1$ se n contiene un numero pari di fattori primi nella scomposizione in fattori primi
- $\mu(n) = -1$ se n contiene un numero dispari di fattori primi.

Quindi, confrontando i coefficienti in (i) con i valori di $\mu(n)$:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\mu(n)}{n}\right) J(x^{\frac{1}{n}})$$

Il misterioso N è il numero tale che $x^{1/(N+1)} < 2$ (pag.30). Inoltre si noti che l'assenza di $J\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$ nello sviluppo (i) a pag.30 non è dovuta a un errore di stampa ma al fatto che $\mu(4) = 0$.

Tutto sta dunque nel trovare un'espressione analitica per J(x).

Come già annunciato, si mostra ma non si dimostra in Appendice I, che

$$\frac{ln\zeta(s)}{s} = \int_0^\infty J(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

Ora, questa equazione, all'occhio di un matematico, appare far parte di una vasta classe di simili equazioni, riconducibili alla formula generale

$$f(s) = \int_a^b K(s,x) g(x) dx$$

Si può interpretare l'equazione dicendo che il "nucleo" *K(s,x)* trasforma (mediante integrazione) la funzione g(x) nella funzione f(s). Nel nostro caso il nucleo è

$$K(s,x) = x^{-s-1}$$

Si noti che in ogni integrale definito, la variabile di integrazione (in questo caso x) scompare. Per esempio

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dx = \frac{1}{s}$$

senza più traccia della x.

Il ramo dell'analisi matematica che tratta questo tipo di equazioni si chiama "Teoria delle trasformate integrali". Di trasformate ne esistono diverse, molte delle quali riconducibili l'una all'altra con un semplice cambiamento di variabili. Ai tempi di Riemann la teoria era agli albori e Riemann dovette inventarsi gran parte delle formule necessarie. Oggi, però, la teoria esiste. Anzi, esiste a tal punto che il metodo delle trasformate integrali (in particolare di Fourier e di Laplace) viene utilizzato ad esempio in elettrotecnica senza preoccuparsi delle basi teoriche. Noi faremo lo stesso. Un matematico di oggi, guardando l'equazione per logζ(s)/s direbbe: "Ma è chiaro, questa è una trasformata di Mellin (con s al posto di –s)". Infatti la trasformata di Mellin è definita come

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\, g(x)dx$$

Ora, una trasformata che abbia qualche utilità deve avere un'anti-trasformata, che fa tornare dalla trasformata, o dai risultati ottenuti operando sulla trasformata, ai risultati sulle funzioni originali, come ben sanno gli elettrotecnici. Nel caso della trasformata di Mellin l'anti-trasformazione è scritta:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} f(s)ds$$

I limiti di integrazione ci dicono che l'integrale, sul piano complesso, viene eseguito lungo una retta parallela all'asse immaginario. Scrivendo s in luogo di -s, troviamo quindi che

$$J(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s}\,\frac{ln\zeta(s)}{s}ds$$

E qui inseriamo la seconda formula per $ln\zeta(s)$, ottenendo:

$$J(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s}\,[ln\xi(0) + \sum ln\left(1-\frac{s}{\rho_i}\right) - ln\left(\frac{s}{2}\right)! - ln(s-1) - \frac{s}{2}\ln(\pi)]\,ds/s$$

A questo punto, il compito in linea di principio, è terminato. Occorre "solo" integrare i cinque termini, ma anche per questo esistono tavole apposite. In effetti il mio Professore di Analisi Matematica diceva che quando il problema è " ridotto alle quadrature", cioè il risultato è espresso in forma di integrale, si può considerare come risolto. L'integrazione è un'arte, che non va a colpo sicuro come la derivazione, semplicemente perché ci sono più funzioni definite come integrali che funzioni ordinarie e quindi, secondo me, il "non esperto" ha il diritto di usare tavole di integrali, o tavole di trasformate.

Gli integrali non sono difficili da eseguire, ma, come dico, ciò non è strettamente necessario. Il termine più importante è $-ln(s-1)$, che con un po' di lavoro produce il termine logaritmo integrale di x, cioè Li(x), come aveva divinato Gauss. Aggiungendo gli altri termini si trova finalmente:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{Im\,\rho>0}[Li(x^{\rho}) + Li(x^{1-\rho})] + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln(t)} - \ln 2$$

Questa formula è il gioiello di Riemann – che però non bastò né a lui (insoddisfatto con meno della perfezione) né ai matematici contemporanei (che capirono il suo testo solo fino a un certo punto). Mi sono solo permesso di assegnare il suo valore a $\ln\xi(0)$, ricordando che $\xi(0)$ vale ½, come accennato in precedenza (pag.27).

Adesso restano da sostituire i vari termini $J(x^{\alpha})$ nella:

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2} J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3} J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5} J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6} J\left(x^{\frac{1}{6}}\right) \ldots$$

Riemann suggerì che prendendo unicamente i termini $Li(x^{1/n})$ si trovava già una buona approssimazione: fino a dieci milioni, l'errore di Riemann nell'approssimazione al conteggio di numeri primi risultava di qualche decina di numeri, mentre quello di Li(x) è da quattro a dieci volte maggiore.

Poi aggiunse anche il termine sugli zeri della Zeta, e qui si fermò, pur suggerendo l'esistenza di ulteriori termini. Quindi i termini esplicitamente indicati da Riemann sono:

$$\pi(x) = Li(x) + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{\mu(n)}{n}\right) Li(x^{\frac{1}{n}}) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} Li\left(x^{\frac{\rho}{n}}\right) + \cdots$$

Il primo termine a secondo membro farebbe parte del secondo termine, se n=1 fosse incluso nella sommatoria. Qui n=1 viene isolato, per ricordare la congettura originale di Gauss.

Il terzo termine a secondo membro forse richiede qualche illustrazione. Supponiamo di sapere dal primo termine che N = 4, come abbiamo visto per n=26 (pag.30), in quanto non c'è alcun numero primo inferiore alla radice quinta di 26. **La doppia sommatoria è allora la somma di quattro addendi:**

Primo addendo (n = 1): $Li(x^{\rho_1}) + Li(x^{\rho_2}) + Li(x^{\rho_3}) + Li(x^{\rho_4}) + Li(x^{\rho_5}) + Li(x^{\rho_6}) + \cdots fino\ all'infinito.$

Secondo addendo (n=2): : $Li\left(x^{\rho_1/2}\right) + Li\left(x^{\rho_2/2}\right) + Li\left(x^{\rho_3/2}\right) + Li\left(x^{\rho_4/2}\right) + Li\left(x^{\rho_5/2}\right) + Li\left(x^{\rho_6/2}\right) + \cdots fino\ all'infinito$

Terzo addendo (n=3): $Li\left(x^{\rho_1/3}\right) + Li\left(x^{\rho_2/3}\right) + Li\left(x^{\rho_3/3}\right) + Li\left(x^{\rho_4/3}\right) + Li\left(x^{\rho_5/3}\right) + Li\left(x^{\rho_6/3}\right) + \cdots fino\ all'infinito$

Quarto addendo (n=4): $Li\left(x^{\rho_1/4}\right) + Li\left(x^{\rho_2/4}\right) + Li\left(x^{\rho_3/4}\right) + Li\left(x^{\rho_4/4}\right) + Li\left(x^{\rho_5/4}\right) + Li\left(x^{\rho_6/4}\right) + \cdots fino\ all'infinito$

Qui finiscono i termini della sommatoria principale, ma ciascuno è a sua volta una sommatoria di infiniti termini che ***sperabilmente*** converge.

E questo, ci dà un buon risultato? Guardiamo cosa succede alla funzione che noi calcoliamo, rispetto a $\pi(x)$.

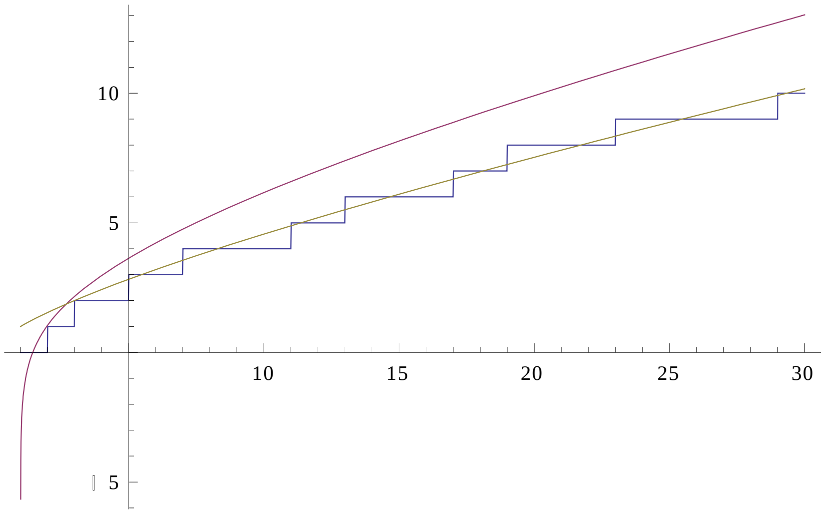


Fig.17

La $\pi(x)$ è la funzione gradini originale che vogliamo approssimare al meglio. Il logaritmo integrale (primo termine di destra) è la funzione (rossa) più alta, i primi due termini insieme danno la linea ocra, che, come si vede, interpola assai bene i gradini. Ma quale sarà l'effetto degli zeri?

Ecco qua:

Con le prime dieci coppie di zeri (gli zeri vengono a coppie, ϱ e 1-ϱ):

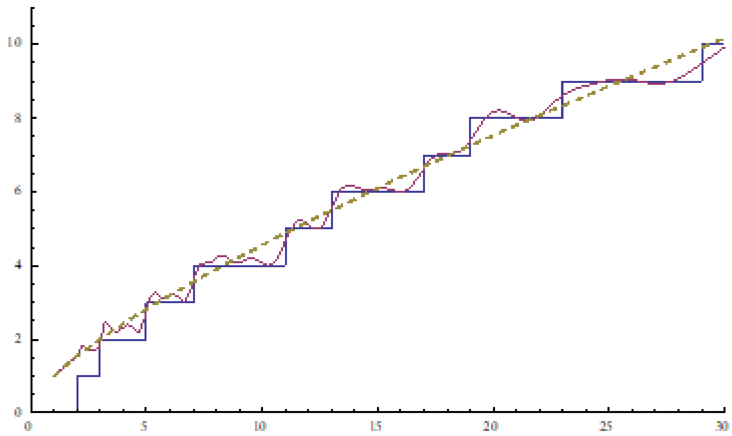


Fig.18

Con le prime cento coppie di zeri troviamo:

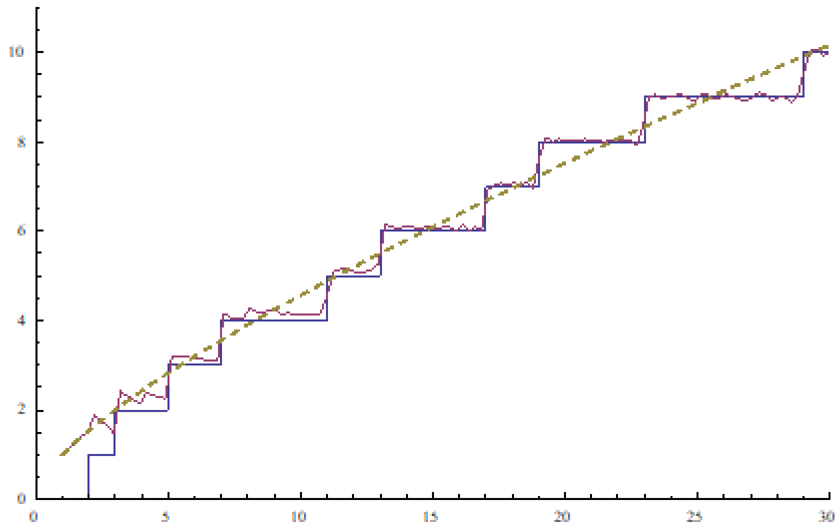


Fig.19

Si conosce oggi la posizione dei primi 10^{13} zeri, tutti rigorosamente allineati in fila indiana sulla retta $\sigma = ½$, ma il risultato che abbiamo davanti ai nostri occhi è, secondo me, uno dei risultati più notevoli della matematica ottocentesca. Si tratta di un diagramma che ai tempi di Riemann era impossibile vedere "dal vivo", ma, chissà, forse lui aveva visto anche questo.

Ma, a questo punto, ci accorgiamo che abbiamo assistito a un tour de force matematico non piccolo, abbiamo trovato un modo di trasformare una funzione liscia in una funzione a gradini irregolari, ma non abbiamo minimamente parlato della congettura o ipotesi di Riemann. Perché gli zeri dovrebbero giacere tutti sulla retta $\sigma = ½$?? A lui, la cosa evidentemente non interessava. Nel suo articolo la sua ipotesi viene menzionata solo *en passant,* aggiungendo che la sua validità o meno non gli serve per dimostrare il teorema dei numeri primi.

Riemann non era soddisfatto del suo risultato, che lui non vide, ma che è ai nostri occhi quasi incredibile, perché, a suo parere, non dimostrava che il termine correttivo, che ci dà la stupefacente funzione a gradini, durasse per così dire all'infinito, permettendo di dimostrare il teorema dei numeri primi, e dando addirittura una previsione esatta di tutti i numeri primi.

Già sappiamo che gli zeri *non banali della $\zeta(s)$, comuni gli zeri della $\xi(s)$,* sono tutti nella striscia compresa fra le rette Re(s)=0 e Re(s) =1, e che le due funzioni sono invarianti per riflessione s ↔ 1-s. E' dunque ragionevole pensare che possano essere tutti *sull'asse di questa riflessione, cioè sulla linea Re(s) =1/2* , che si ottiene risolvendo l'equazione s = 1-s. Questa è la congettura di Riemann, uno dei "Millennium Problems" del Clay Institute, a cui è destinato un premio di un milione di dollari. Riemann aggiunse che comunque il resto del suo lavoro, dedicato a dimostrare il teorema dei numeri primi, che lo condusse ad esprimere la $\pi(n)$ in termini degli zeri della Zeta di Riemann, non richiedeva che la congettura fosse corretta. E' comunque evidente che se sappiamo che tutti gli zeri della Zeta sono allineati sulla retta $\sigma = 1/2$, la loro ricerca è immensamente facilitata, e così la costruzione di figure come Fig.19, che sarebbe non una possibilità ma una certezza. Vedremo un'altra applicazione elementare quando parleremo della Funzione di Von Mangoldt (p.47), per i coraggiosi che vorranno continuare la lettura.

CONCLUSIONE

Riemann aveva lasciato un certo numero di cose da provare per giungere alla sua formula. Tant'è vero che, per quanto essa desse come termine principale il termine suggerito da Gauss, e anche i termini correttivi, il risultato di Riemann non fu considerato come valida dimostrazione del teorema dei numeri primi, lo scopo che Riemann si era presumibilmente fissato. Lo Edwards enumera a pag. 38 una serie di sei affermazioni fatte e non dimostrate da Riemann. Quattro furono dimostrate tra il 1890 e il 1900, cioè almeno trent'anni dopo. Due di esse sono tutt'ora da dimostrare (e una è appunto la congettura di Riemann).

E ora, caro unico lettore che mi ha seguito fino qui, tollerando le mie omissioni, imprecisioni ed immancabili errori (ma insomma, se hai letto fin qui è perché sapevi che il compito non era banale, e non ti stupirai dei miei difetti: dopo tutto sono un dilettante anch'io), mentre prometto che cercherò di migliorare il prodotto in base ai commenti che riceverò, ma solo da amici, concludo con una speranza:

Che Bernhard Riemann, grande matematico e sant'uomo, mi perdoni!

CHE SUCCEDEREBBE SE LA CONGETTURA DI RIEMANN FOSSE DIMOSTRATA VERA (O FALSA)?

Dunque per gli Americani la dimostrazione della Congettura di Riemann sarebbe il "più importante problema della matematica". Il pedone matematico, o meglio, il motorettista, da cui è stato scritto ed a cui è dedicato questo saggio, può dedurne chissà quali portentose conseguenze: ieri non avevamo dimostrato la congettura di Riemann, oggi la possiamo dimostrare. Ieri era tutto grigio e senza speranza, oggi gli uccellini cantano sui rami ed i fiori di biancospino sbocciano sulle siepi.

Per conto mio mi sono convinto che il giorno successivo alla dichiarazione che una dimostrazione è stata finalmente accettata sarà esattamente eguale al giorno precedente, tanto nella vita ordinaria, quanto, ohibò, in matematica, facendo un'eccezione per campi molto specializzati. E magari quel giorno non è tanto lontano, perché certamente candidati per la dimostrazione già esistono e sono sotto esame proprio in questi tempi.

Per spiegare quello che ho capito io, svilupperò un'analogia che ho visto *in nuce* su Internet. Supponiamo di pianificare un viaggio a Parigi. Ci è stato detto che Parigi esiste, e magari ci siamo anche stati in aereo. Semplicemente, questa volta vogliamo andarci in auto. Però Parigi sappiamo che c'è e l'abbiamo già visitata almeno in parte, senza affatto curarci dell'esistenza o meno di carte stradali.

Ora, da tempo i matematici considerano la congettura come vera ed hanno sviluppato applicazioni di successo che si basano su di essa. Tra l'altro, diverse dimostrazioni del Teorema dei Numeri Primi si basano su di essa. Andare in aereo a Parigi e visitarla è come assumere che la congettura sia vera ed esplorare le conseguenze di questa ipotesi. La mappa automobilistica che ci conduce a Parigi è l'analogo della dimostrazione. Potrà dirci molte cose che non sappiamo sulla Francia, e potremo scoprire strada facendo incantevoli località di cui conosciamo appena o non conosciamo affatto l'esistenza. Potremo magari individuare scorciatoie interessanti. Ma in realtà resteremmo stupefatti solo se scoprissimo che Parigi non esiste, che la città che visitiamo magari è un sito virtuale in un sotterraneo in Olanda. Insomma, se scoprissimo che è tutta una montatura delle agenzie turistiche e che gran parte delle foto che vediamo sono solo foto di fondali dipinti, mentre la Torre Eiffel è un modellino alto un metro e mezzo. Noteremmo allora che con qualche attenzione si possono vedere le giunture tra le foto di Parigi (proprio come per dimostrare che gli Americani, come è noto, non sono stati sulla Luna). Scommetto che non le avevate mai notate.

In effetti, dopo di aver faticato con me a cercare di capire che cosa significhi la congettura di Riemann, non credo che un solo "motorettista matematico" voglia sobbarcarsi il compito di cercar di capire che cosa significhino le altre più astruse congetture in teoria dei numeri, che risulterebbero dimostrate in quanto l'unico loro neo è che si basano sulla congettura di Riemann (per un elenco si veda Wikipedia, "Riemann Hypothesis", o anche "Riemann Zeta Function").

L'ipotesi di Goldbach (1742) è forse l'unica di queste congetture immediatamente accessibile. Con qualche elaborazione, essa afferma che ogni numero intero maggiore di 5 può esser scritto come somma di tre numeri primi. Goldbach scrisse a Eulero chiedendogli di provare questa congettura. Eulero non ci riuscì e in cambio propose la forma più nota della congettura di Goldbach, che "ogni intero pari può esser scritto come somma di due primi". A quei tempi si conveniva che 1 fosse un numero primo. Rifiutata questa convenzione, si aggiunge la condizione che l'intero pari sia maggiore di 2.

La verifica dei primi casi è alla portata di un bambino che sappia cosa sono i numeri pari ed i numeri primi e sia dotato di una buona dose di pazienza:

4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 7 + 3 or 5 + 5
12 = 5 + 7
14 = 3 + 11 or 7 + 7

ma con mezzi più potenti si è andati assai più avanti, fino a circa 10^{18} .
Su questa congettura si è lavorato molto e si sono ottenuti molti risultati importanti. Ma una dimostrazione manca: sembra che la prova della congettura di Riemann renderebbe possibile la desiderata dimostrazione. E' però difficile pensare che il mondo possa cambiare se questa congettura sarà dimostrata, così come la dimostrazione del famoso teorema di Fermat non ha modificato la vita di ogni giorno, neppure dei matematici.

Sovente, presentando le conseguenze di un'eventuale dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, si introduce l'ipotesi di Riemann generalizzata, la dimostrazione della quale avrebbe ancor più importanti conseguenze. In parole povere, l'ipotesi o congettura generalizzata anzitutto generalizza la funzione Zeta in un modo standard ottenendo le cosiddette Funzioni L di Dirichlet, a cui si applica la congettura che gli zeri di queste funzioni, sotto certe condizioni, siano collocati insieme agli zeri della funzione Zeta a noi nota, sulla stessa retta parallela all'asse immaginario, con parte reale = ½.

Le funzioni L di Dirichlet sono utilizzate in molti campi della matematica e quindi la dimostrazione della congettura generalizzata faciliterebbe il progresso su un vasto fronte della matematica. Tuttavia, in questo saggio questo argomento non lo abbiamo neppure sfiorato.

Leggo talvolta che la dimostrazione della congettura di Riemann potrebbe aiutare a trovare nuovi modi di fattorizzare i grandi numeri. Come è noto, la difficoltà di questa

fattorizzazione è alla base dei sistemi di cifratura utilizzati, per esempio per garantire la sicurezza dell'informazione su Internet o altre reti specializzate. Trovare metodi veloci di fattorizzazione vorrebbe dire che da un giorno all'altro tutti i sistemi di sicurezza di Internet potrebbero diventare vulnerabili, e con essi andrebbe nei guai l'intero sistema di comunicazioni, cioè quello finanziario internazionale, quello militare, quello dei trasporti e tutto il resto.
Ma queste conseguenze si potrebbero avere solo se la dimostrazione della congettura permettesse di escogitare strade completamente nuove *en passant*, ciò che non mi pare garantito. La pura e semplice validità della congettura di Riemann, sono certo, è già data per scontata, almeno sperimentalmente, da tutti coloro che studiano, o dal di dentro o dal di fuori, questi sistemi di sicurezza. Io suderei freddo ogni volta che prendo l'aereo o apro un conto in banca se sapessi che la mia sicurezza è unicamente legata al fatto che la congettura di Riemann sia dimostrata o meno, o addirittura, che si sappiano o non si sappiano fattorizzare dei numeri immensi. Chi sa quali sono le possibilità degli hackers? Quali i computer o sistemi di computer a loro disposizione?

Ma quanto ho detto non dovrebbe sminuire l'importanza di una dimostrazione della congettura di Riemann. Semmai dovrebbe sottolineare quanto il mondo della matematica sia diverso dal nostro e migliore del nostro. Si tratta di un mondo olimpico, i cui adepti in genere non cercano la ricchezza o la fama (credo che la matematica sia la strada più difficile per raggiungere la ricchezza e la fama), in cui l'onestà è assoluta perché non vi può esistere la truffa. La matematica progredisce implacabile, aggiungendo ogni giorno al suo registro risultati piccoli e risultati grandi, totalmente indifferente alle applicazioni buone o cattive che se ne possono trarre. Questo progredire senza ritorno è l'essenza stessa della matematica, e sarebbe la cosa più stupefacente se fossero i matematici a stupirsene.

APPENDICE I.

La funzione J(x)

Incominciamo a lavorare sulla prima espressione della Zeta. Questa può essere sviluppata utilizzando la serie

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$$

e sostituendo $\frac{1}{p_n^s}$ in luogo di x. Avremo così una doppia serie, una sui numeri primi e una sui numeri naturali, in quanto ogni addendo $ln\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)$ produce a sua volta una serie

$$ln\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n}\right) p^{-ns}$$

Quindi:

$$ln\zeta(s) = \sum_p \sum_n \left(\frac{1}{n}\right) p^{-ns}$$

A noi interesserebbe anzitutto trasformare la doppia sommatoria in un integrale. Per far questo ci serviremo di due funzioni "improprie", aggettivo in cui si sente il disprezzo in cui le tengono i matematici. Ma i fisici le usano e noi le useremo.

La prima funzione è la funzione a gradino $U(x-a)$. Questa vale zero da - ∞ ad a, e vale 1 da a +∞. È molto comoda, per esempio per sostituire il limite inferiore di integrazione, e per designare altre funzioni poco ortodosse. Il lettore può dilettarsi a vedere come sia il grafico di $U(x-a) - U(x-b)$.
Qui si vede solo il diagramma di U(x-2).

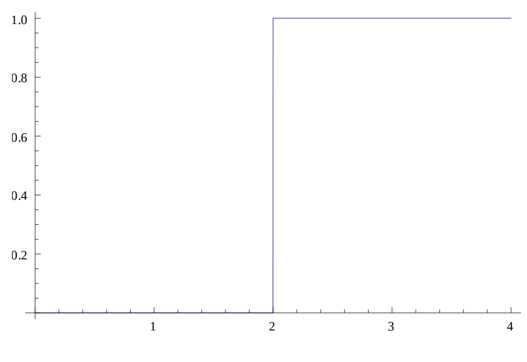


Fig.AI.1

La seconda funzione è la strana derivata di U(x-a), la δ(x-a). Questa è una funzione che vale 0 per x <a, e per x>a, ma vale ∞, come derivata di una funzione verticale, nel punto a. Dato che il suo integrale è la funzione gradino già vista, abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx \ = 1$$

Questa funzione seleziona dei punti precisi ed è vista normalmente solo sotto segno di integrale.

Allora abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta\,(x-a)dx = a$$

La nostra doppia sommatoria può essere trasformata in integrale di una doppia somma di funzioni δ, che noi distingueremo secondo il valore 1/n. Per il resto, la s è la variabile della funzione ζ e compare sempre in esponente.

$$\sum_p \sum_n \left(\frac{1}{n}\right) p^{-ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^s}\right)\left(\sum_{p^s} \delta(x-p^s) + \sum_{n=0}^{n=\infty} 1/n \sum_{p^{ns}} \delta(x-p^{ns})\right)dx$$

Il primo sommatorio selezione i numeri primi p, e facendo l'integrale $1/x^s$ diverrà $1/p^s$. Il restante doppio sommatorio per ogni n individua p^n, che introdotto in $1/x^s$ diverrà p^{ns}. Integrando per parti e considerando che per x = - ∞ U(x) =0 , mentre per s>1 x^{-s} tende a zero per x = +∞ otteniamo che

$$\sum_p \sum_n \left(\frac{1}{n}\right) p^{-ns} = s \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{s+1}}\left[\sum_{p^s} U(x-p^s) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{p^{ns}} U(x-p^{ns})\right]dx$$

dove l'integrale va solo da 0 a ∞ perché non ci sono p inferiori a zero, e di conseguenza per x<0 tutte le U valgono 0. La funzione tra parentesi quadre è la nostra J(x), con i gradini dell'altezza voluta nei luoghi voluti. La s fuori di integrale proviene dall'integrazione per parti, ovvero dalla differenziazione del termine $\frac{1}{x^s}$.

APPENDICE II.

Come ricavare π(x) da J(x).

Ovvero: Inversione di Moebius per pedoni.

Noi vogliamo estrarre la funzione π(x) dalla relazione

$$J(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\,\pi(x^{1/2}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \tfrac{1}{4}\,\pi(x^{1/4}) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5})\ldots$$

Qui seguiremo il semplice metodo di eliminare progressivamente i termini $\pi(x^{\frac{1}{n}})$ per n > 1 dall'espressione di destra.

In primo luogo si calcola:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)J(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \tfrac{1}{4}\,\pi(x^{1/4}) + \tfrac{1}{6}\pi(x^{1/6}) + \tfrac{1}{8}\pi(x^{1/8})\ldots$$

Ora si sottrae membro a membro, ottenendo:

$$J(x) - \left(\tfrac{1}{2}\right)J(x^{1/2}) = \pi(x) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5}) + \tfrac{1}{7}\pi(x^{1/7}) + \tfrac{1}{9}\pi(x^{1/9})\ldots$$

Questa sottrazione ha eliminato dal membro di destra tutti gli esponenti e denominatori multipli di ½.

Per ottenere la trasformazione di Moebius, che ha una forma più compatta, non si sottrae soltanto 1/3 J($x^{1/3}$), ma si procede usando il membro di sinistra come nuova funzione J_2, a cui si sottrae il termine 1/3 $J_2(x^{1/3})$. In altre parole a sinistra avremo:

$$J(x) - \left(\frac{1}{2}\right)J(x^{1/2}) - \left(\frac{1}{3}\right)\left[J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)J\left(x^{\frac{1}{6}}\right)\right] = J(x) - \left(\frac{1}{2}\right)J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\,J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)J\left(x^{\frac{1}{6}}\right)$$

Mentre a destra avremo:

$$\pi(x) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5}) + \tfrac{1}{7}\pi(x^{1/7}) + \tfrac{1}{9}\pi(x^{1/9})\ldots - \left(\tfrac{1}{3}\right)\pi(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{9}\pi\left(x^{\frac{1}{9}}\right) - \tfrac{1}{14}\pi\left(x^{\frac{1}{14}}\right) - \tfrac{1}{15}\pi\left(x^{\frac{1}{15}}\right) - \ldots = \pi(x) + \tfrac{1}{5}\pi(x^{1/5}) + \tfrac{1}{7}\pi(x^{1/7}) + \ldots$$

Ora il membro di sinistra è la nuova funzione J_3, a cui sottrarremo (1/5)$J_3(x^{1/5})$. A sinistra avremo

$$J(x) - \left(\frac{1}{2}\right)J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\,J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)J\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \left(\frac{1}{5}\right)\left[J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)J\left(x^{\frac{1}{10}}\right) - \frac{1}{3}\,J\left(x^{\frac{1}{15}}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)J\left(x^{\frac{1}{18}}\right)\right] =$$

$$J(x) - \left(\tfrac{1}{2}\right)J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \tfrac{1}{3}\,J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \left(\tfrac{1}{5}\right)J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \left(\tfrac{1}{6}\right)J\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + \left(\tfrac{1}{10}\right)J\left(x^{\frac{1}{10}}\right) + \left(\tfrac{1}{14}\right)\pi\left(x^{\frac{1}{14}}\right) +$$

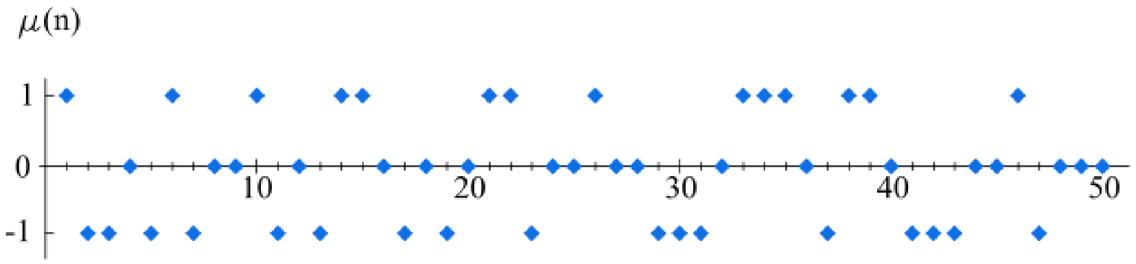
$\frac{1}{15} J\left(x^{\frac{1}{15}}\right) - \left(\frac{1}{30}\right) J\left(x^{1/30}\right) \ldots =$

Mentre a destra avremo:

$\pi(x) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{1/5}\right) + \frac{1}{7}\pi\left(x^{1/7}\right) + \frac{1}{11}\pi\left(x^{1/11}\right)\ldots - \left(\frac{1}{5}\right)\pi\left(^{1/5}\right) - \frac{1}{25}\pi\left(x^{\frac{1}{25}}\right) - \frac{1}{35}\pi\left(x^{\frac{1}{35}}\right) - \ldots =$
$\pi(x) \quad + \frac{1}{7}\pi\left(x^{1/7}\right) + \frac{1}{11}\pi\left(x^{1/11}\right)\ldots$

Vediamo insomma che mentre si cancellano progressivamente tutti i termini di destra (che sono in numero finito) eccetto il primo, cioè il desiderato $\pi(x)$, a sinistra il segno dei coefficienti è determinato dagli esponenti dei fattori primi in cui è scomposto il denominatore dell'esponente. Quindi i segni sono negativi se i fattori sono in numero dispari, purché diversi (e quindi abbiamo -1/2, -1/3, -1/5, e avremo -1/7 , -1/11 etc.), mentre sono positivi se i fattori sono in numero pari, purché diversi (e quindi abbiamo +1/6 e avremmo +1/10, + 1/14, + 1/15 etc. Sono infine scomparsi i termini con almeno due fattori primi eguali (4, 9 etc.)

Stiamo cioè ricostruendo la funzione di Moebius, il cui diagramma abbiamo già visto:



Essa vale:

- μ(1) =1,
- μ(n) = 0 se n contiene nella sua scomposizione in fattori primi un quadrato (o qualsiasi potenza di un numero primo);
- μ(n) = 1 se n contiene un numero pari di fattori primi nella scomposizione in fattori primi
- μ(n) = -1 se n contiene un numero dispari di fattori primi.

APPENDICE III

La funzione di Chebyshev e ulteriori sviluppi.

La magica formula di Riemann praticamente non è più usata, da quando Von Mangoldt (1895) semplificò il risultato introducendo una nuova funzione (incidentalmente, questa non è la più nota "funzione di Von Mangoldt").

Ricordiamo la formula per J(x):

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln(t)} - \ln 2$$

Il suo differenziale, ricordando che:

$$\frac{d\left(Li(x^{\rho})\right)}{dx} = \left(\frac{1}{\ln(x^{\rho})}\right)(\rho\, x^{\rho-1}) = \frac{\rho x^{\rho-1}}{\rho \ln \mathrm{x}}$$

è:

$$dJ(x) = dx\left[\frac{1}{\ln x} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\ln(x)} - \frac{1}{x(x^2-1)\ln x}\right]$$

Cioè

$$(ln\ x)\ \frac{dJ(x)}{dx} = 1 - \sum_{\rho} x^{\rho-1} - \frac{1}{x(x^2-1)}$$

Ora, un punto cruciale nella dimostrazione per ottenere la J(x) era stata la formula

$$\frac{ln\zeta(s)}{s} = \int_{0}^{\infty} J(x)\ x^{-s-1}\, dx$$

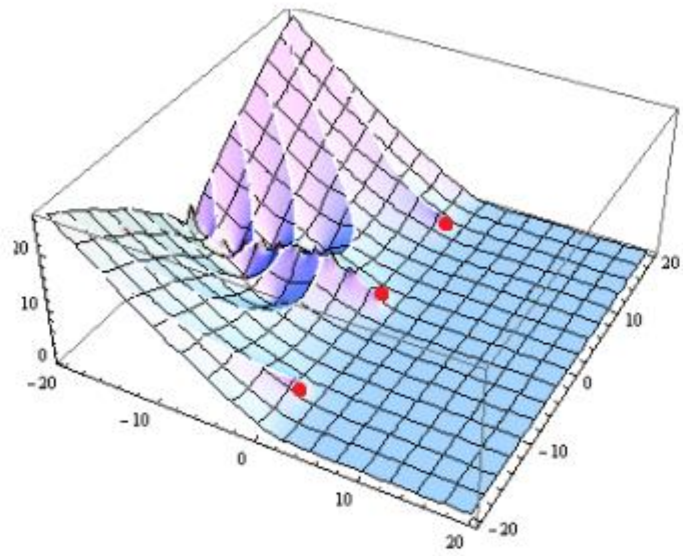
O l'equivalente

$$ln\zeta(s) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{dJ(x)}{dx}\right) x^{-s}\, dx$$

che si ottiene dalla precedente mediante integrazione per parti.

Ma la funzione lnζ(s) è una funzione alquanto ostica, come si può vedere dal solito diagramma dell'inverso del valore assoluto, che mette in evidenza gli zeri, i quali diventano picchi di altezza infinita.

Nei tre promontori si vedono tre picchi sulla linea σ = ½ che sono in realtà infiniti e corrispondono ai due primi zeri della funzione Zeta



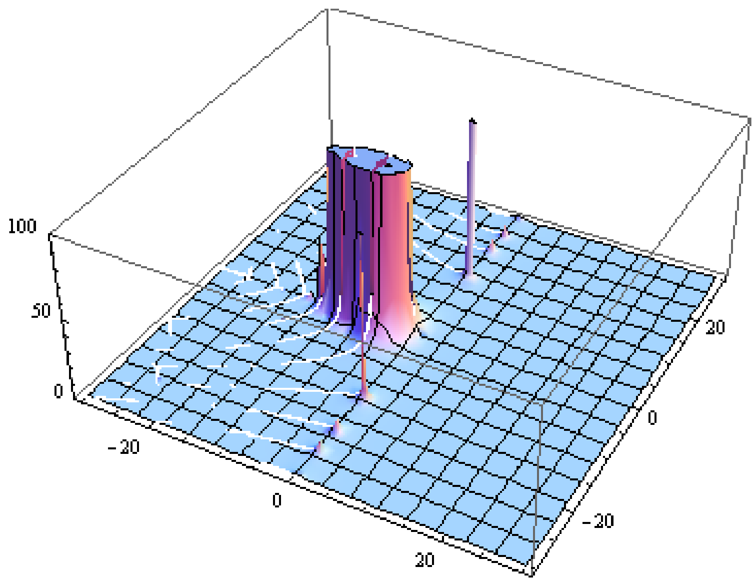
Deriviamo ora entrambi i membri di questa equazione rispetto a s, ricordando che

$$x^{-s} = e^{-s \log x}.$$

L'equazione diventa:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\int_0^{\infty} x^{-s} (\log x) \left(\frac{dJ}{dx}\right) dx$$

Dove $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ ha un aspetto assai diverso (come al solito, gli zeri sono messi in evidenza facendo il diagramma dell'inverso del modulo):



Matematicamente, l'ultimo diagramma è più simpatico perché ha solo due file di picchi che si incrociano ad angolo retto: gli uni, sull'asse reale negativo, che nel diagramma non si vedono troppo bene in quanto i primi soprattutto sono assai larghi alla base, sono nella posizione degli zeri banali per s = -2n; gli altri sono nella posizione degli zeri non banali, sulla retta σ = ½ .

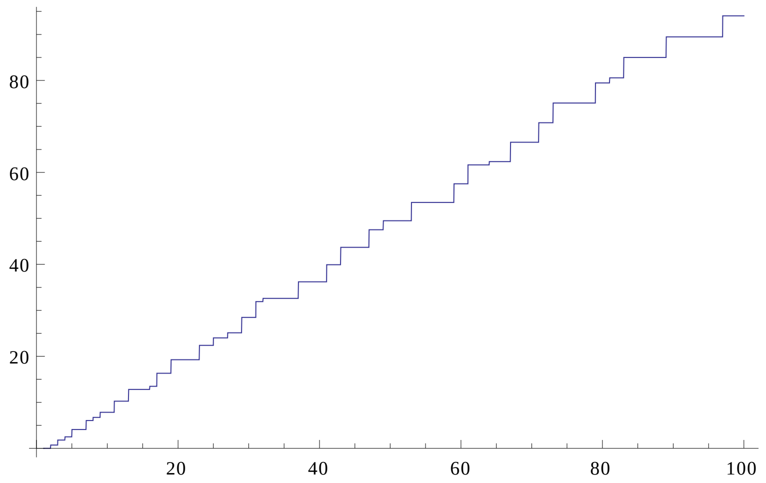
Dato che la dJ/dx è (per noi) una somma di funzioni $\delta(x-p^{ns})$, si vede senza troppo sforzo che l'equazione diventa:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\int_0^\infty x^{-s}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)dx$$

Dove

$$(ln\,x)\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{d\psi}{dx} = 1 - \sum_\rho x^{\rho-1} - \frac{1}{x(x^2-1)}$$

La ψ(x) così costruita, vedi caso, è una funzione a gradini studiata da Chebyshev (circa 1850, qualche tempo prima di Riemann, che era al corrente dei suoi studi), che ad ogni potenza *n* di un numero primo introduce un gradino di altezza $\left(\frac{1}{n}\right)\ln p^n = \ln p$.



(Noto che delle cinque più comuni translitterazioni del nome di Чебышёв da me trovate, una sola rende vagamente il suono originale, che sarebbe una sorta di "cebyshòff", con la lettera *y* che cerca di rendere un suono russo a metà tra *i* e *u* francese).

Integrando senza farsi troppe domande la dψ/dx, e tenendo conto del fatto che per x>1:

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^{-2}}{1-x^{-2}}\right) = x^{-3}(1+x^{-2}+x^{-4}\dots) = \sum_{n=1} x^{-2n-1}$$

si può ragionevolmente congetturare che l'espressione analitica di ψ(x) sia l'assai semplice:

$$\psi(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + \sum_{n} \frac{x^{-2n}}{2n} + \ cost$$

In effetti Von Mangoldt dimostrò che l'espressione è valida, e che la costante vale *ln(2π).*

Mentre questa funzione non è immediatamente riconducibile alla $\pi(x)$ essa è ovviamente più maneggevole, non contenendo l'ostica funzione Li(x), e si presta ad ulteriori sviluppi teorici.

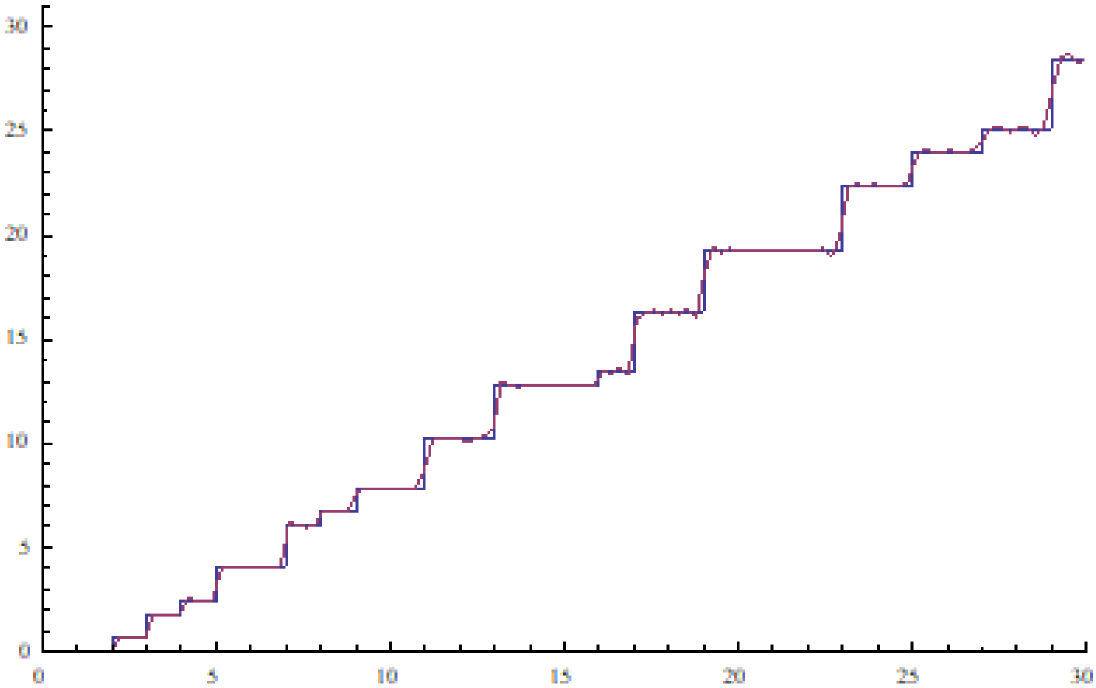
Intanto si vede subito che il terzo termine è assai simile al secondo, e può essere interpretato come lo stesso termine, calcolato però per gli zeri banali, che sono nelle posizioni s = -2n. Il termine va rapidamente a zero al crescere di x.

Si ammetta ora come vera la congettura di Riemann. Il punto importante è che, per quanto gli zeri abbiano una parte reale (s=1/2) ed una parte immaginaria (t), il fatto che ad ogni zero collocato in ϱ=1/2+it ne corrisponda uno collocato in 1-ϱ = ½ -it, fa sì che ogni coppia di zeri dia un contributo reale. Con pochi passaggi, e ricordando che $x^{it} = e^{it \ln x}$, si vede che:

$$\frac{x^{\rho}}{\rho} + \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4} + t^2} \right) (\cos(t \ln x) + \ 2\, t \sin(t \ln x))$$

che è reale ed è proporzionale a $x^{\frac{1}{2}}$ ovvero $\sqrt{x}$, l'ordine di grandezza della correzione apportata da tutti quanti gli zeri al punto x. Quest'ultimo è un risultato curioso. Fu notato che quando viene lanciata un milione di volte una monetina, non ne escono esattamente 500000 teste e 500000 croci, ma si osservano scarti dell'ordine della radice quadrata di 1000000, cioè 1000. Dunque si scelga un numero x, si getti 2 x volte la moneta, si troveranno x teste con un determinato scarto, e la $\psi(x)$ differirà da x di una grandezza dello stesso ordine. Partendo da questa osservazione si cercò di provare che "quindi" la congettura di Riemann è corretta "con probabilità 1" (Denjoy, 1931). Naturalmente, però, gli scarti aumentano all'infinito: sono gli scarti relativi che tendono a zero. (È tra l'altro questa mancata comprensione della legge dei grandi numeri, quello che ha mandato in malora diversi giocatori alla roulette).

Per concludere voglio solo mostrare l'effetto dell'inclusione degli zeri della Zeta per approssimare la ψ(x): con le prime 100 coppie di zeri. Si ottiene la spettacolosa approssimazione:



E, sperando di aver lasciato a bocca aperta l'eventuale lettore, termino qui.