CORPO RIGIDO

NON SOGGETTO A FORZE

Risposta a una domanda comparsa su Quora nel gennaio 2019.

Come si chiama l'effetto\principio per cui un oggetto tridimensionale allungato ha 2 assi di rotazione stabili e uno instabile (ribalta oltre a ruotare)?

Non è veramente necessario creare un nuovo principio per risolvere un problema di dinamica del corpo rigido che può essere risolto tanto qualitativamente quanto graficamente ed è un classico esercizio da libro di testo. Per cui sarei stupito se il fenomeno su cui Lei si informa fosse promosso a principio e avesse un nome. Se lo ha, confesso la mia ignoranza.

Per rispondere in modo più completo occorrerebbe sapere quanto Lei conosce di meccanica dei corpi rigidi.

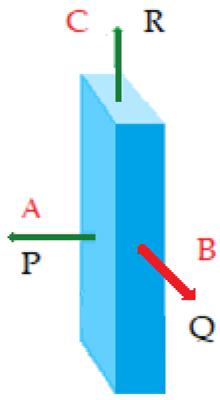
Se non ne conosce molto, può prendere il fenomeno a cui Lei si riferisce come una curiosità di natura, che deriva, come vedremo, non da uno, ma da due principi fondamentali: la ***conservazione dell'energia*** e la ***conservazione del momento angolare.***

Se ha qualche conoscenza del soggetto e desidera una spiegazione, si può procedere in uno dei due seguenti modi.

I. Soluzione grafica.

Questa soluzione esprime graficamente i due principi: la conservazione dell'energia e la conservazione del momento angolare di un corpo rigido non soggetto a forze.

Supponiamo che il corpo abbia tre *momenti principali di inerzia* A > B > C diversi fra loro. Nel caso di un corpo di forma abbastanza regolare e densità almeno approssimativamente costante, come il classico pacchetto di sigarette che si usa(va) solitamente per dimostrare questo fenomeno, i tre momenti sono facilmente identificabili: il momento A è il maggiore, perché (immaginando il corpo rigido scomposto in cubetti) gli elementi di massa sono in media più distanti dall'asse di simmetria, che è anche uno degli assi principali di inerzia (e il momento d'inerzia di una massa m rispetto a un asse di rotazione a distanza r è i = m r^2); il momento C è il più piccolo, perché gli elementi di massa sono in media più vicini all'asse; il momento B è intermedio.



Chiameremo P, Q, R le tre componenti della velocità angolare lungo i tre assi principali d'inerzia, che saranno intesi lungo gli assi x,y,z della figura. Il nostro compito sarà spiegare perché la rotazione intorno all'asse B è instabile, mentre è stabile intorno agli altri due assi.

Nel nostro caso abbiamo che l'energia totale E è eguale all'energia cinetica, che a sua volta in un corpo rigido è data da:

$$E = \frac{1}{2}\left(AP^2 + BQ^2 + CR^2\right)$$

Questa si trasforma agevolmente nell'equazione di un'ellissoide nelle coordinate AP, BQ, CR di semiassi √(2EA), √(2EB), √(2EC), che supponiamo diversi tra loro:

$$\frac{(AP)^2}{2EA} + \frac{(BQ)^2}{2EB} + \frac{(CR)^2}{2EC} = 1$$

Il momento angolare M è conservato, quindi a maggior ragione è conservato il suo modulo quadrato, che è:

$$A^2P^2 + B^2Q^2 + C^2R^2 = M^2$$

Le coordinate AP, BQ, CR possono essere intese anche come M_x, M_y, M_z . Questa è una sfera di raggio M.

È evidente che, poiché C < A <B,

$$2EC = ACP^2 + BCQ^2 + C^2R^2 < M^2$$

Mentre

$$2EA = A^2P^2 + ABQ^2 + ACR^2 > M^2$$

Cioè M^2 è compreso fra 2EC e 2EA.

Il quadro totale è che la ***punta del vettore M può muoversi solo sulle linee in cui si intersecano la sfera che esprime la conservazione del momento angolare e l'ellissoide che esprime la conservazione dell'energia***, o stare fissa nei punti in cui sono tangenti. Trovare il moto della punta del vettore M in funzione del tempo non è un problema banale, come si vede dalle soluzioni che sono le non elementari curve disegnate sulla superficie dell'ellissoide, delle quali si dovrebbe anche conoscere come si sviluppano nel tempo.

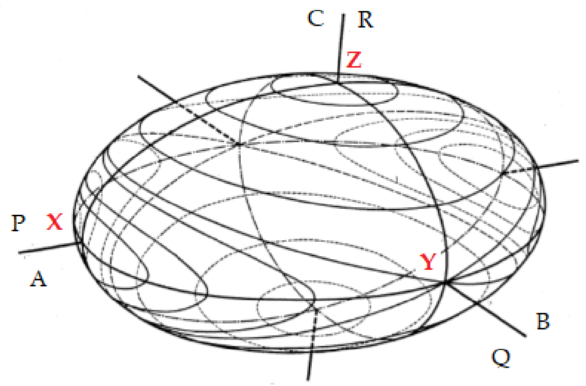


Fig.1a

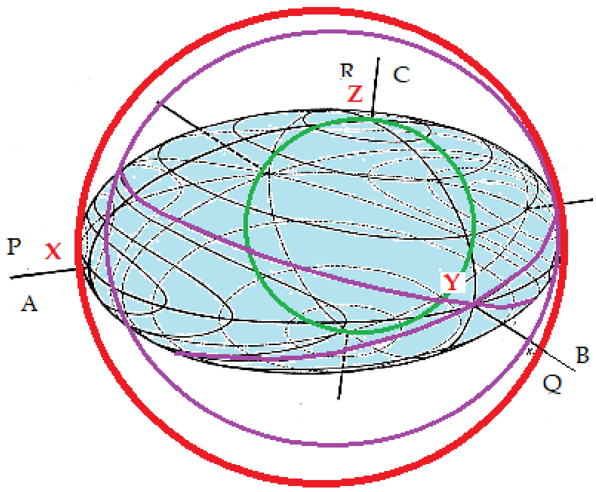


Fig.1b

A noi basta una soluzione qualitativa, nel caso di piccole perturbazioni del moto intorno a uno degli assi principali d'inerzia.

La **sfera rossa del massimo momento angolare**, di raggio √(2AE) è tangente all'**ellissoide dell'energia** nel punto X e nel polo opposto. Essa corrisponde all'asse maggiore dell'ellissoide di inerzia, ed è la sfera massima compatibile con i due teoremi di conservazione citati. Rimpicciolendo la sfera, cioè riducendo M^2, vediamo che essa interseca l'ellissoide in curve chiuse di ampiezza crescente. Se quindi perturbiamo di poco la rotazione intorno all'asse A, la punta del vettore M disegna delle ellissi di piccolo raggio intorno al punto di tangenza, ma non se ne allontana indefinitamente.

Lo stesso avviene se perturbiamo il moto inizialmente intorno all'asse C. Qui, aumentando la **sfera verde del minimo momento angolare**, di raggio √(2CE), vediamo che sull'ellissoide si disegnano curve chiuse, che anche qui sono inizialmente ellissi di piccolo raggio. Ciò significa che *in entrambi i casi la perturbazione* **rimane circoscritta** *nelle vicinanze del punto di tangenza, e il moto è quindi stabile*. Non è così se siamo al punto Y, dove l'ellissoide è tangente alla sfera di raggio √(2BE). La sfera taglia l'ellissoide secondo le due linee violette che si incrociano in Y. Queste due linee, che si **allontanano indefinitamente** dal punto Y, sono seguite dalla punta del vettore momento angolare. Ciò significa che *una piccola perturbazione si amplifica, e quindi il moto è instabile.*

E questo spiega qualitativamente il fenomeno.

II. Metodo analitico.

Il moto di un corpo libero con tre assi di simmetria diversi non soggetto a forze è data dalla soluzione delle seguenti tre equazioni di Eulero (inevitabilmente):

$$A\frac{dP}{dt} = (B - C)QR$$

$$B\frac{dQ}{dt} = (C - A)RP$$

$$C\frac{dR}{dx} = (A - B)PQ$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni differenziali in P,Q,R (se si fa attenzione, si nota che si passa dall'una all'altra con una permutazione circolare tanto delle A, B, C, quanto delle P, Q, R). (1)

Una rotazione intorno all'asse A è data da P = costante, Q = 0, R = 0; le rotazioni intorno agli altri due assi principali di inerzia sono individuate in simile modo. Se consideriamo il moto intorno al punto X, si noti che in X, AP è positivo, cioè P è positivo (il momento d'inerzia è sempre positivo).

Introduciamo ora una piccola perturbazione (un'oscillazione, un colpetto al corpo in rotazione, un soffio d'aria sul nostro pacchetto di sigarette in rotazione) alla quale attribuiremo componenti p, q, r (Fig.2).

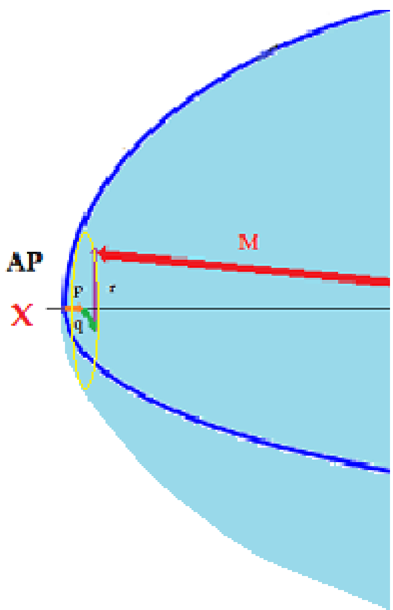


Fig.2. Le componenti p,q,r della perturbazione che sposta la punta di M dal vertice X dell'ellissoide: p verrà calcolata come nulla rispetto a P, mentre q e r oscilleranno descrivendo insieme l'ellisse gialla.

Si ha che:

I. **Nel caso della perturbazione intorno all'asse A**, siccome P è costante, e grande, p, q, r sono del primo ordine di piccolezza e noi non vogliamo andare al secondo ordine, si ha:

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr \approx 0$$

Che dà p= costante, perché il secondo membro è del secondo ordine.

Troviamo invece, intorno all'asse B, al primo ordine, e considerando che P = costante:

(1) $$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rP$$

Infine, la piccola componente q intorno all'asse C, porge, al primo ordine e considerando che P =costante:

(2) $$C\frac{dr}{dt} = (A - B)Pq$$

Deriviamo la (1) rispetto al tempo e sostituiamo la (2) nella (1). Otteniamo

$$\ddot{q} = (C - A)P\frac{dr}{dt} = \left(\frac{(C - A)(A - B)}{C}P\right)\; q$$

Ma il coefficiente in parentesi a secondo membro è negativo, perché C< A e A> B. Quindi si può scrivere

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

Questa, come è noto, è l'equazione di un moto oscillatorio, con soluzione

q(t) = D sin(kt)+ F cos(kt), **stabile.**

Facendo lo stesso conto, derivando una seconda volta la r e inserendo il valore per dq/dt, si trova una simile equazione

$$\ddot{r} + l^2 r = 0$$

nella quale il coefficiente l^2 ha a numeratore lo stesso prodotto **(C-A)(A-B)**, che è sempre negativo e quindi produce ancora una soluzione oscillatoria, **stabile.**

II. La situazione si ripete se supponiamo che il **moto sia inizialmente intorno all'asse C,** punto Z, che sia cioè P=0, Q= 0, R diversa da zero e positiva. Facendo i conti, tentazione alla quale certamente il lettore non può resistere, si trova R costante. Per le componenti p e q della perturbazione si trovano due equazioni, con un coefficiente a secondo membro al numeratore del quale compare il prodotto **(B - C)(C - A)**, che è ancora negativo, e quindi produce due soluzioni oscillatorie, stabili, per p e q.

III. Ma che succede se consideriamo la **rotazione intorno all'asse B** nel punto Y (P=0, Q diversa da zero e positiva, R= 0)?

Le equazioni che ci interessano sono ora

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)Qr$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)Qp$$

Ma se deriviamo rispetto al tempo e sostituiamo, troviamo al numeratore il prodotto **(B - C)(A - B)**, che è positivo. Ora le equazioni che indicano lo sviluppo temporale della perturbazione diventano:

$$\ddot{p} - m^2 p = 0$$

$$\ddot{r} - n^2 r = 0$$

Questa volta le soluzioni sono:

per la prima: p = F exp(mt)+ G exp (-mt); per la seconda r =H exp(nt)+K exp(-t).

Gli esponenziali negativi sono decrescenti e non danno fastidio, ma quelli positivi indicano che la perturbazione cresce indefinitamente (almeno nelle vicinanze del punto Y). **Quindi il moto intorno all'asse B è instabile.**

E questo è quello che volevamo dimostrare.

Mi pare che alla radice del nostro stupore sia il fatto che viviamo in un universo che ha tre dimensioni spaziali, e quindi, o le soluzioni sono tutte stabili, o sono tutte instabili, o ***una su tre*** fa eccezione.

NOTE

(1) Vale la pena notare che il caso di un corpo rigido *asimmetrico* non soggetto a forze (caso di Eulero) è risolubile in generale per mezzo di funzioni ellittiche. Se agiscono forze, solo casi particolari, in cui siano attive particolari forze (corpo pesante) e/o esistano particolari simmetrie dei momenti principali di inerzia, possono essere risolti (casi di Lagrange-Poisson, di Hesse, di Staude, della Kowalewskaya, di Chaplygin). La dinamica del corpo rigido, insieme al problema del moto dei tre corpi, pure insolubile, dominò la meccanica analitica nel secolo XIX e parte del XX.