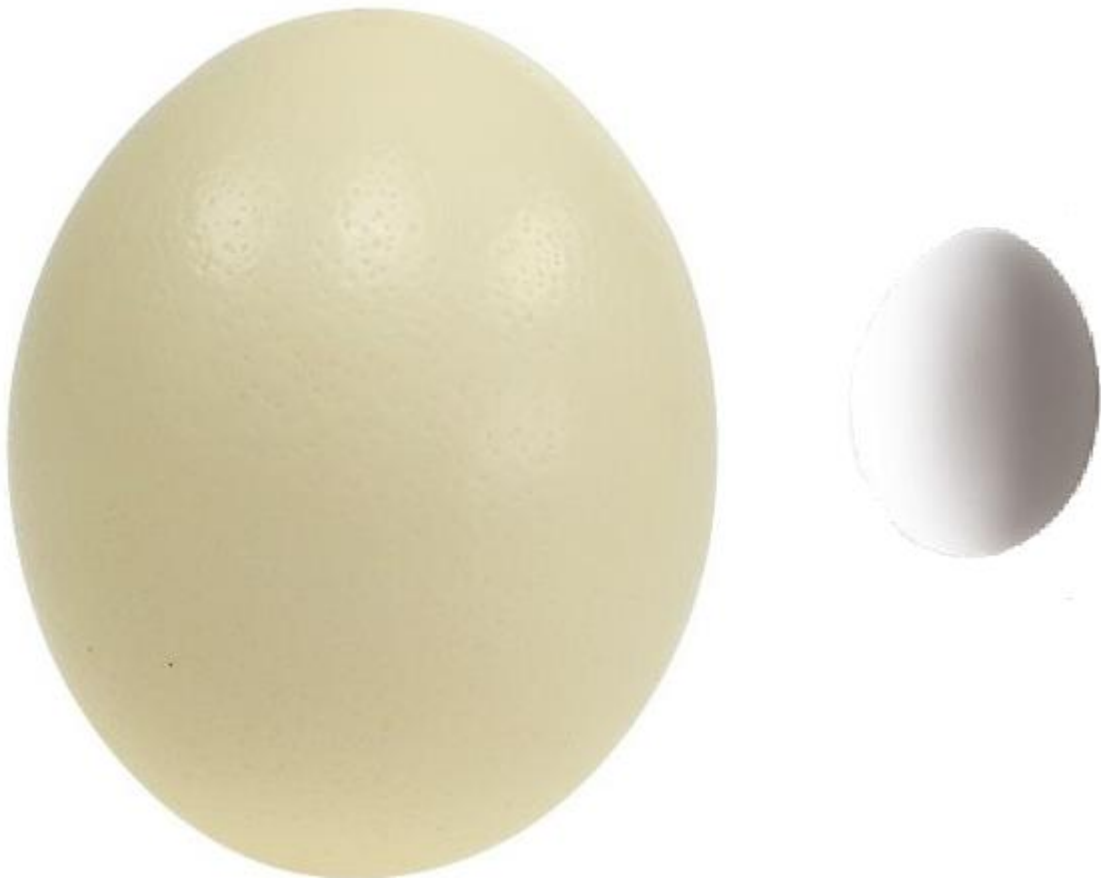


LEGGE DEL CUBO QUADRATO

Che cos'è la legge del cubo quadrato e quali sono le sue implicazioni?

I. Il problema

Se si vuol fare una frittata nella savana e si scopre che le astute galline faraone se la sono svignata nottetempo, mentre gli struzzi non hanno saputo prevedere il futuro e ci hanno lasciato alcune uova, sorge subito il problema di capire a quante uova di gallina corrisponde un uovo di struzzo, che un tempo era più facile da trovare (ho incontrato gente che ne aveva sbagliato la soluzione e si dovette subire le prese in giro degli amici per decenni). Si tratta di un problema importante, perché ne discendono le dimensioni della frittata, e la quantità di altre sostanze da aggiungere. Dunque, a quante persone basterà una frittata di un uovo di struzzo, calcolando due uova di gallina per persona?



Naturalmente scherzo: la legge del cubo-quadrato ha importanti applicazioni in biologia e in ingegneria e altri campi più eterogenei (come l'arte culinaria, vedi sopra). Alcune di

queste applicazioni sono presentate nell'articolo [Legge del cubo quadrato - Wikipedia](#), e assai più numerose applicazioni sono date nel corrispondente articolo inglese, a cui rimanda la risposta su Quora inglese, facile da tradurre in quanto è costituita da una sola riga. E poi noi italiani dovremmo essere fieri di questa legge, a quanto pare citata per la prima volta da Galileo nei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638, verso la fine della "Prima giornata".

Dunque si prendano un uovo di gallina e uno di struzzo e si supponga che in prima approssimazione abbiano esattamente la stessa forma (non è vero, l'uovo di gallina è più "slanciato" di quello di struzzo, che è più sferico). Allora misuriamo lunghezza $L(g)$ tra due punti qualsiasi relativamente all'uovo di gallina, per esempio il diametro "equatoriale", e in media troviamo 4 cm; misuriamo il diametro equatoriale $L(s)$ dell'uovo di struzzo, e troviamo 13. Il rapporto $R1 = 3.25$; misuriamo l'altezza dell'uovo di gallina e troviamo 6, quella media dell'uovo di struzzo è 15, Rapporto $R2 = 2.5$. I due rapporti sono simili ma non eguali. Se lo fossero sarebbe tutto più semplice. Ma poiché sono simili possiamo prendere come rapporto medio 2.8 circa. Ora, la legge del cubo-quadrato ci dice che il rapporto tra le superficie dell'uovo di struzzo e quella dell'uovo di gallina, $A(s)/A(g) = R^2$ (cioè nel nostro caso, se vogliamo verniciare un uovo di struzzo per Natale ci occorre 7.8 volte la quantità necessaria per verniciare un uovo di gallina), mentre il rapporto tra volumi vale $V(s)/V(g) = R^3 = 22$. Un uovo di struzzo equivale a circa 22 uova di gallina, una frittata per 11 persone. In questo caso, usando la formula del volume dell'ellissoide di rotazione misurato in : $V = (4/3) * \pi * a^2 * b$ si può calcolare il vero rapporto in volume tra due ellissoidi in cui i semiassi siano $(a=1, b= 1)$ e $(a=3.25, b= 2.5)$. Si ottiene circa 26. Naturalmente si tratta di "uova standard" e ci possono essere variazioni, ma si vede che queste non cambiano un risultato forse controintuitivo: *un uovo di struzzo vale più di venti uova di gallina*.

II. La legge.

Abbiamo dunque imparato tre cose:

- 1) che dice la legge: per due oggetti perfettamente simili, misurato il rapporto R delle distanze fra due punti corrispondenti, il rapporto delle aree è R^2 e il rapporto dei volumi è R^3 .
- 2) che ci sono dei limiti di validità, in quanto la formula è perfettamente valida solo se i due oggetti sono perfettamente simili;
- 3) che i risultati sono sovente controintuitivi. Ho fatto domande a persone (che avevano visto uova di struzzo solo di sfuggita), e mi hanno risposto quasi invariabilmente che un uovo di struzzo equivale a una decina di uova di gallina, mentre abbiamo visto che il rapporto dei volumi è piuttosto superiore a 20.

Come si può rendere plausibile questa legge? Ad esempio supponendo che il volume sia suddiviso in cubetti che lo approssimano nel modo migliore possibile. Il volume del cubo

in generale chiaramente viene moltiplicato per 8 *raddoppiando lo spigolo* ($8=2^3=R^3$). Ma nel nostro uovo approssimato da cubetti il volume totale è dato dalla somma dei volumi dei cubetti elementari, e l'eventuale fattore di dilatazione del volume, cioè il rapporto R^3 , può essere messo a fattor comune.

Similmente, la superficie del cubo, $6L^2$, viene moltiplicata per 4 ($=2^2=R^2$). Ma, si può osservare, la superficie dei cubetti elementari interni all'uovo non conta. A cui si risponde che un'eguale frazione, indipendente dalla dilatazione, di cubetti elementari ha in entrambi i casi una superficie che non contribuisce al totale. Inoltre, solo alcune facce dei cubetti esposti contribuiscono alla superficie totale, ma la frazione del totale di facce che contribuiscono è la stessa per le uova di struzzo e quelle di gallina (o lo sarebbe se esse fossero perfettamente simili) e anche qui il fattore di dilatazione della superficie, R^2 , può essere messo a fattor comune.

III. Un'applicazione in biologia è il seguente:

“Gli insetti non possono superare una dimensione massima, approssimativamente quella di un passerotto”. Gli aracnidi, ragni e scorpioni, (che non sono insetti) possono essere un poco più grossi. I crostacei pure. Sono animali simili, tutti appartenenti al tipo “Artropodi”, ma hanno una diversità, che è ciò che fa la differenza, ed è il sistema di respirazione. I grandi dinosauri e i mammiferi hanno evoluto sistemi di respirazione più complessi.

Il problema di tutti gli animali è quello di portare una quantità sufficiente di ossigeno alle cellule dei tessuti. Il sangue degli uomini e degli altri animali superiori assorbe l'ossigeno nei polmoni e lo trasferisca ai tessuti.

Dice più o meno Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/Apparato_respiratorio_degli_insetti) (ho messo insieme la versione italiana e quella francese):

“Il trasporto dell'ossigeno fino alle cellule differenzia nettamente gli Insetti dai Vertebrati. I Vertebrati affidano il trasporto interno dei gas alla circolazione sanguigna. L'apparato respiratorio ha perciò la funzione di aumentare la superficie dell'interfaccia di separazione fra la rete capillare sanguigna e l'ambiente esterno, sia con la respirazione branchiale sia con quella polmonare.

“L'insetto, alla differenza di altri animali, ivi compresi certi artropodi (1), non è munito di polmoni né di branchie. Respira per un sistema di trachee che si dividono in tracheole, e portando direttamente l'aria agli organi. L'aria è condotta nei tessuti sotto forma gassosa. Non c'è superficie o liquido specializzato negli scambi gassosi.

Nella generalità degli Insetti il trasporto dell'ossigeno è affidato integralmente all'apparato respiratorio, che in questa funzione fisiologica si sostituisce alla rete capillare sanguigna, tipica dei Vertebrati, con una rete capillare propria”.

Ma ciò crea un limite alle dimensioni dell'insetto, **perché il numero di trachee è proporzionale alla superficie dell'insetto**. Aumentando le dimensioni lineari dell'insetto, per esempio la sua lunghezza, la superficie aumenta col quadrato della lunghezza, mentre il volume, e con esso la massa di tessuti che hanno bisogno di ossigeno, aumenta col cubo della lunghezza (Legge dei quadrati e dei cubi).

Raggiungiamo presto delle dimensioni alle quali i tessuti interni soffocano. Le dimensioni massimali di

un insetto superano appena quelle di un passero: il più grosso coleottero, *Titanus Giganteus*, (della famiglia dei Cerambycidae, misura 17 cm di lunghezza, ma ha un corpo allungato, che migliora il rapporto superficie/volume.



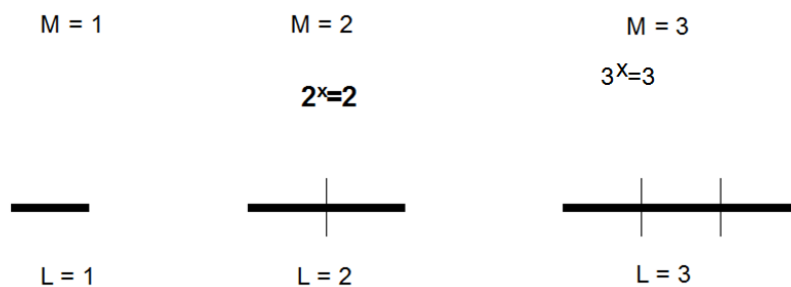
Titanus Giganteus (ridotto 1:2)

Possiamo dunque dormire pacificamente. Non saremo attaccati da scarafaggi giganti (fanno già abbastanza danni colle dimensioni che hanno) e degli insettoni extra-terrestri, per esempio delle libellule rosa di dimensioni umane, avrebbero difficoltà a vivere nell'atmosfera terrestre quando sbarcassero dalla loro astronave.

IV. Quadrato, Cubo e dimensioni in generale

Quando noi ingrandiamo qualcosa parliamo normalmente di *ingrandimento lineare* R . Abbiamo visto che la grandezza di un dato oggetto cresce come una potenza dell'ingrandimento lineare, $M = R^x$.

Per il segmento abbiamo la seguente situazione:

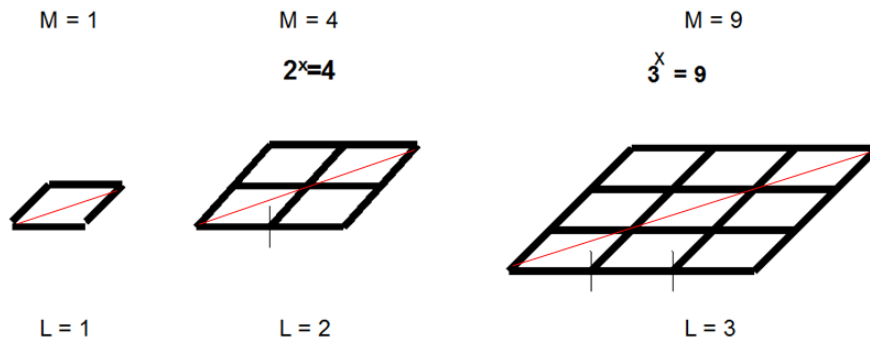


Cioè, ingrandendo due volte abbiamo due segmenti eguali a quello di partenza etc.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 2$, $3^x = 3$ etc. **Ad occhio** si vede che $x=1$.

$$M = R^1$$

Per il quadrato la situazione è la seguente:



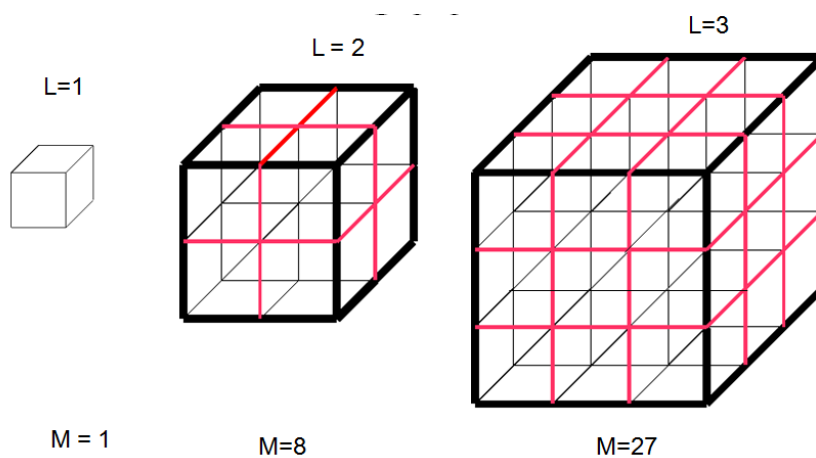
Cioè ingrandendo 2 volte il lato abbiamo 4 quadrati eguali a quello di partenza, ingrandendo tre volte abbiamo 9 quadrati.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 4$, $3^x = 9$ etc. **Ad occhio** si vede che $x = 2$.

$$M=R^2$$

Occorre ricordare che L è un “ingrandimento lineare”, cioè il rapporto fra due lunghezze corrispondenti. Possono essere i lati, o anche le diagonali del quadrato, che ho segnato in rosso.

Infine, per il cubo:



Cioè ingrandendo 2 il lato volte abbiamo 8 cubi eguali a quello di partenza, ingrandendo tre volte abbiamo 27.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 8$, $3^x = 27$ etc. **Ad occhio** si vede che $x = 3$.

$$M=R^3$$

A questo punto facciamo uscire il coniglio dal cappello: questa x in $R^x = M$ è legato alle “dimensioni” della superficie e del volume rispettivamente, anzi, *può essere preso come una definizione del concetto di dimensione*, che ci permette un’estensione, per esempio, a dimensionalità diverse da 2 e 3. Chiaramente, ci aspettiamo che un cubo in quattro dimensioni scali come R^4 , dove R è il rapporto delle dimensioni lineari. E di qui si può procedere senza grandi voli pindarici a maggiori numeri di dimensioni. Non è proprio lo stesso concetto di dimensioni originario, ma lo comprende. E’ il concetto di “dimensione di Hausdorff”.

Ma, ci si potrebbe chiedere, esistono casi in cui l’oggetto scala una sua qualche proprietà geometrica di un fattore R^x , dove x non è un numero intero, ma frazionario?

La risposta è sì, e gli oggetti si chiamano frattali.

Darò un semplice esempio. Si noti che i frattali sono figure piane o solide che hanno un’infinità di dettagli che si ripetono ingrandendo indefinitamente la figura. Esse quindi, a rigore, non possono essere disegnate: bisognerebbe scendere in infiniti dettagli, e non c’è mai né tempo né modo di farlo. Possiamo però presentare come la figura si forma in gradini successivi. Un esempio semplice è il “Triangolo di Sierpinski”.



Esso, generazione zero, è un triangolo equilatero. Ora si raddoppiano le dimensioni (generazione uno) e si elimina dal triangolo di Sierpinski il triangolo centrale come in figura. (Per poter fare un disegno di misura accettabile, rimpicciolisco ogni generazione della metà). In ogni generazione successiva si raddoppiano ancora le dimensioni e si eliminano tutti i triangoli centrali dei vari triangoli pieni. E così via. Si vede che a ogni generazione l’area non si raddoppia né si quadruplica come ci aspetteremmo (2^2) ma, per $R=2$, l’area viene solo moltiplicata per 3. Quindi abbiamo l’equazione

$$3 = 2^x, \text{ da cui, } x = \text{Log}[3]/\text{Log}[2] = 1.585.$$

Cioè abbiamo trovato che le dimensioni del triangolo di Sierpinski sono 1.585...

Ci sono altri frattali classici, quali la curva di Von Koch, che ha dimensioni 1.262. Magari ne riparleremo in uno “special” sui frattali.

E con questo penso che possiamo chiudere.