La massa della Luna

Come la si calcola.

In realtà questo post è nato dalla mia risposta a una domanda comparsa su Quora:

Un corpo sulla luna pesa 15000 newton. Quanto vale la massa sulla Luna? E sulla Terra?

I. Introduzione.

Bella domanda, anche perché si presta a riflessioni su cui potrei scrivere un trattato come piace a me. Intanto a mezza domanda si risponde subito. *La massa sulla Luna e sulla Terra e in qualsiasi luogo ove vige la meccanica newtoniana è la stessa.*

Ma qual è questa massa?

Si noti che la domanda non richiede di calcolare la massa **della** Luna. Nondimeno la massa della Luna sarebbe utile per conoscere l'accelerazione gravitazionale sulla Luna eccetera (magari conoscendo anche il raggio della Luna). Questa considerazione solleva una interessante questione, che vedremo al punto III.

II. La risposta alla domanda iniziale.

In altri tempi (pre-Internet) probabilmente il testo del problema avrebbe semplicemente riportato le costanti necessarie per risolverlo, a seconda dei gusti dell'insegnante. Ora si suppone evidentemente che chi deve risolvere il problema
a) conosca a memoria le costanti (improbabile). Oppure
b) sappia trovarsele (in rete o in altro modo).

Ciò posto, abbiamo vari modi di dare l'unica risposta, a seconda delle costanti che conosciamo o ci sono date.

1) **Viene data l'accelerazione gravitazionale sulla superficie lunare (1.625 m/s^2).** La massa, sulla Luna (e sulla Terra), è 15000/1.6245 = 9230.8. Il dato sull'accelerazione si trova su Google (si cerchi, forse contro-intuitivamente, "accelerazione gravitazionale sulla Luna"). *Un dato solo da cercare.*

2) **Non si conosce l'accelerazione di gravità sulla superficie Lunare.**

2a) Non ci vuole Isacco Newton per ricavarla: sempre su Wikipedia, ma non solo, si trovano tanto la massa della Luna quanto la costante di gravitazione, quanto il raggio lunare (già, bisogna sapere anche quello!). E, naturalmente:

$$g_L = G\ M_L/R_L^2 = \ldots..$$

Tre dati da cercare su Google/Wikipedia.

2b) facciamo entrare anche la Terra, che non sarebbe strettamente necessaria. Ora, l'accelerazione gravitazionale della Terra alla superficie è data da

$$g_T = G\ \frac{M_T}{R_T^2} = \left(G\frac{4}{3}\pi\right)\rho_T R_T^3 \frac{1}{R_T^2} = \ K\rho_T R_T$$

E similmente quella della Luna, con la stessa costante K.

Per cui il rapporto dei due pesi è dato dal rapporto

$$\frac{W_T}{W_L} = \frac{\rho_T R_T}{\rho_L R_L}$$

Il rapporto delle densità è (5.51/3.34) e quello dei raggi è (6371 /1737). Poco importano le unità usate, purché siano le stesse al numeratore e al denominatore di ciascuna frazione: qui, per esempio, si tratta di g/cm^3 per la prima e km per la seconda frazione. Il prodotto dei due rapporti è 6.051. Quindi il peso sulla Terra è 6.051 volte il peso sulla Luna, 90762 Newton. Se vogliamo ora sapere la massa (che è la stessa sulla Terra e sulla Luna) si divide 90762 per 9.8 = 9261.3 kg. Le differenze da altri risultati sono trascurabili e provengono dagli arrotondamenti.

Qui dobbiamo sapere le due densità e i due raggi (della Terra e della Luna), oltre al fattore 9.8, noto anche ai bambini. *Quattro dati (più uno, per coloro che non studieranno fisica) da cercare.*

I dati che riguardano la Madre Terra (densità e Raggio) dovrebbero essere noti. Per gli altri si può ragionare. Il rapporto 6.051 può quasi essere calcolato a memoria se si pensa che il raggio della luna è circa 1/3 di quello terrestre (tutti sanno che è più piccola della Terra) , e la densità è circa la metà (tutti sanno che la Terra ha un nucleo denso che la Luna non ha). Del fattore 9.8 ho già detto. *Per caso,* si trova quasi esattamente lo stesso risultato.

Intanto, però, è scomparsa la costante gravitazionale dal carnet delle cose che dobbiamo sapere. Peccato, perché in unità cgs è facile da ricordare: SEI virgola SETTE in 10 alla meno OTTO.

III. Quali dati sperimentali deve conoscere un fisico?

Un bel soggetto di discussione sarebbe definire quali dati empirici, cioè non deducibili dal ragionamento, un fisico dovrebbe conoscere senza doverseli cercare ogni volta. Quando studiavo fisica io (a suo tempo ho fatto anche questo) i fisici più bravi si distinguevano perché conoscevano un armamentario di dati, costanti, formule, che permetteva loro di raggiungere in un lampo una risposta abbastanza corretta per fare i famosi calcoli *"back-of-the- envelope"*, su una busta usata. Fermi e Majorana, secondo la leggenda, li facevano su pacchetti di sigarette (se ben ricordo, Macedonia -Marca oro). C'è anche un aneddoto su Fermi: pare che un giorno abbia detto a un giovane fisico che occorreva portare la temperatura a -40 gradi. L'incauto giovane chiese premurosamente "Fahrenheit o Celsius?". Fermi sembra si sia limitato a inarcare le sopracciglia….**(1)** Von Neumann e Feynman, a quanto pare, i calcoli li facevano a memoria. Ho conosciuto diversi laureati in fisica che conoscevano o sapevano ricavarsi sui due piedi i logaritmi dei numeri con due o tre cifre decimali. C'erano le astuzie del mestiere: Feynman ricordava per esempio che la costante *e* alla terza potenza fa quasi esattamente 20. Altri avevano un fedele taccuino con i dati più importanti. *Certi esaminatori in Paesi anglo-sassoni adottavano quello che secondo me è il metodo migliore: permettevano agli studenti di portare all'esame (scritto) un unico foglio su cui avevano scritto le costanti e le formule che ritenevano più utili, notando (i) che la preparazione del foglio era già da sé un buon ripasso; (ii) che di rado un bravo studente faceva poi ricorso al foglio nello svolgere l'esame. Uno dei sostenitori di questa tesi era Walter Kohn, Premio Nobel per la Chimica 1998 con John Pople.* Lo scrivo, perché magari qualche insegnante di Fisica può trovare utile questo metodo.

IV. La massa della Luna

Ma adesso viene una buona domanda. Supponiamo di voler utilizzare la massa della Luna e di non conoscerla. Come la potremmo ricavare? Oggi la cosa è banale….fino a un certo punto. Meglio leggerla su Wikipedia, che però si basa su misure fatte quando c'era la corsa allo spazio, terminata da quarant'anni e passa. Allora era facile: si metteva in orbita una navicella spaziale e se ne calcolavano tutti i parametri orbitali che si volevano, oppure si posava un gravimetro sulla superficie lunare. Il primo satellite lunare, sovietico, fu Luna-10 nel 1966. Poco dopo Luna-10, vi fu la serie dei Lunar Orbiters americani.

Ma come fecero i grandi del passato? (Newton, nulla meno di lui, fu il primo a occuparsene, e Laplace, altro grande, ci lavorò per anni). Ho fatto una piccola inchiesta e ho trovato che per la maggior parte, quelli tra le persone che conosco, che hanno seguito il biennio di Fisica o Ingegneria (non gli insegnanti, *of course*), non hanno la minima idea di come si possa calcolare questo valore. Il resto ne ha un'idea abbastanza vaga. In molti libri divulgativi si riporta il dato senza commenti o con commenti banali. In rete non si trova molto di meglio, ma a saper cercare si trova. Quora inglese su questo soggetto non è al meglio **(2)**. Wikipedia tace nel pur lunghissimo articolo "Moon". In effetti c'è una mezza dozzina di metodi diversi, ma chi se li ricorda? Chi li ha mai saputi? Inutile dire che se ci sono cinque o sei metodi è perché nessuno di essi, per un motivo o per l'altro, va benissimo: o dipendono da osservazioni delicate e probabilmente lunghe, o sono complicati da effetti che interferiscono negativamente. E infine tutti sono definitivamente superati dai metodi astronautici.

Ma vediamo (concettualmente) il **metodo di Newton**, che si basò sulle maree. Egli non dubitò mai che le maree fossero causate dalla Luna, eventualmente in collaborazione/contrasto col Sole.

Il problema era che molte delle costanti e grandezze (soprattutto astronomiche) erano note con imprecisione, per cui i suoi risultati variarono coll'avanzare delle edizioni dei suoi *Principia*, a partire dal 1687. Quello che farò ora per non complicare troppo le cose sarà seguire il metodo di

Newton, ma usando i valori corretti dei dati sperimentali, e segnalando quali erano ignoti o malnoti ai suoi tempi. Ad esempio, la misura di G gli era utile, e avrebbe potuto ottenerla dall'equazione

$$G = \frac{g\,R^2}{M_T} = 6.7\ 10^{-8}\ in\ cgs\ units.$$

Qui, però erano poco note le grandezze R e M. Da notare che Newton suggerì per la densità terrestre un valore "*5 o sei volte la densità dell'acqua*" (in effetti è 5.54 volte).

Ammettendo di conoscere con precisione G, ciò che ai tempi di Newton era impossibile, possiamo determinare la massa solare dall'equazione che produce l'orbita terrestre, orbita circolare (lo è quasi). Usando il caso della Terra, che orbita in un anno (T) intorno al Sole:

$$M_s = \frac{4\pi^2 D^3}{T^2 G} = 4 * \mathrm{Pi}^2 * \frac{(1.496 * 10^{13})^3}{6.67408 * 10^{-8}} / \left((3.154 * 10^7)\right)^2 = \ 1.9906\ 10^{33}\ g$$

(la misura esatta è 1.988 10^33). Dunque occorre anche la distanza dal Sole. Qui Newton usò il metodo della parallasse solare per determinare la distanza solare ed ottenne un valore per la massa solare circa tre volte più grande di quello oggi noto. Come già annunciato io metterò i valori oggi noti).

Ora osserviamo le maree: esse sono complicate da vari effetti astronomici, geografici, stagionali e occasionali per cui le differenze tra loro dei massimi (o dei minimi) possono essere notevoli. Però Newton pensò che tutti questi effetti di disturbo (vento, pressione, conformazione geografica, volume d'acqua in un estuario e via dicendo) influissero all'incirca in egual modo sull'attrazione solare e su quella lunare, in modo che il rapporto tra l'accelerazione mareale indotta dalla Luna e quella indotta dal Sole poteva essere considerato come approssimativamente costante. Newton sapeva che quando il Sole e la Luna erano allineati con la Terra (maree sizigiali), la marea era più alta di quando il Sole e la Luna erano in quadratura, cioè uno allo zenith e l'altro/a all'orizzonte. Ma le due accelerazioni, impresse dal sole e dalla luna dovevano essere circa dello stesso ordine di grandezza e, poiché la marea sussisteva anche in quadratura, era chiaro che la Luna dominava sul sole **(3).** Oggi sappiamo che i corretti valori sono *all'incirca* (https://en.wikipedia.org/wiki/Tide):

a) Effetto Lunare: 1.1 10^(-7) g (dove g indica l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre, non i grammi)

b) Effetto Solare: 0.52 10^(-7) g

c) Rapporto Luna/Sole= 2.11

Newton ebbe un'altra intuizione, *che gli effetti fossero proporzionali all'inverso della terza potenza della distanza.* Di come giunse a questo cruciale risultato non diede spiegazione **(4).** Notò certo che, anche se la Luna avesse avuto una densità pari a quella terrestre, un'accelerazione mareale proporzionale a R^(-2) non avrebbe permesso alla luna di predominare sul Sole. Probabilmente ragionò sulle linee del noto metodo da me descritto in risposta ad una domanda pubblicata su Quora **(5).** In conclusione non arrivò lontano dall'espressione data su Wikipedia, https://it.wikipedia.org/wiki/Forza_di_marea in cui si afferma:

Nella maggior parte dei casi, considerando due corpi uno in orbita rispetto all'altro, è possibile usare un'approssimazione: differenziando la legge di Newton della gravità rispetto alla distanza si ha:

$$dF = \frac{2GMm}{r^3}\,dr \ll r$$

dr è in direzione radiale, m è la massa di un corpo orbitante intorno a M. In qualunque modo si interpretino m e dr, **accurate osservazioni delle maree** dicono che il rapporto fra le due accelerazioni, lunare e solare, è dato da:

$$2.11 = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{D_S}{D_L}\right)^3$$

In cui: D_S =1.496 10^{13} cm è la distanza Terra-Sole o unità astronomica; D_L = 3.84 10^{10} cm è la distanza Terra-Luna; M_S = 1.988 10^{33} g è la massa solare. L'unica incognita è così M_L, che, eseguendo i calcoli, vale:

$$M_L = 7.09\ 10^{25}\ g$$

da confrontarsi con la più precise valutazione oggi accettata (https://en.wikipedia.org/wiki/Tide):

$$M_L = 7.342\ 10^{25}\ g$$

Con gli errori dei dati e il suo "fudge factor" **(3)** Newton ottenne un valore doppio di quello da noi calcolato. Ma il metodo era ovviamente corretto. Se la dipendenza fosse dall'inverso del quadrato anziché del cubo della distanza, la Luna risulterebbe 20 volte più pesante, mentre Newton, accettando come massimo un valore della densità lunare pari a quello della densità terrestre avrebbe tollerato un valore doppio per la massa della Luna, non molto di più.

Per eseguire questo calcolo occorre conoscere l'importante rapporto 2.11, due distanze e la massa solare. Se Newton avesse messo 1 in luogo di 2.11, avrebbe ancora trovato un valore vicino al vero, 3.38 10^25 g. Ma Newton preferì andare nella direzione opposta… Ad ogni modo, come si è detto, il valore 2.11 è approssimato. Oggi si preferisce il valore 2.18, facendo probabilmente il calcolo inverso, cioè usando il valore della massa della Luna, ormai nota con precisione, per trovare il rapporto fra l'azione del Sole e quella della Luna sulle maree.

V. Dopo Newton (6).

Dopo Newton, si seguirono varie strade verso il valore attuale K= (massa terrestre)/(massa lunare) = 81.300588 (Newton aveva ottenuto K = 39.788 e noi, facendo i conti, abbiamo ottenuto 83.31).

i) Affinare il valore del rapporto fra l'azione lunare e l'azione solare delle maree. Fu la via seguita anzitutto da **Laplace** mediante una serie di osservazioni eseguite a Brest. Il valore proposto da Laplace fu K=75 (1825). Ma Laplace, rendendosi conto delle difficoltà della valutazione del rapporto fra le azioni del sole e della terra nelle maree, aveva guardato anche ad altri metodi e altri valori e fatto una media tra i vari risultati.

ii) **Airy (1849)** avrebbe usato un secondo metodo basato sul fatto che quando si calcola con precisione l'orbita della Luna intorno alla Terra, si riduce il problema dei due corpi al problema di un corpo. Per riuscire a ciò, l'orbita è calcolata in base a una massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, **(7),** col risultato che, per orbite circolari o quasi, come quella terrestre:

$$\mu\omega^2 r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\omega^2 r \ = G m_1 m_2 / r^2$$

(si noti che le masse gravitazionali sono immutate). Di qui:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Dove r è la distanza media Terra-Luna, T è la durata del mese sidereo. Si può identificare m_1 con la massa della Luna e m_2 con la massa della Terra e dividere il tutto per la massa della Terra, da cui:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2 M_T} - 1.$$

Airy avrebbe rinunciato a questo approccio a causa dell'imprecisione delle varie costanti che gli servivano. Ciononostante , questo mi pare il metodo concettualmente più semplice, che richiede la conoscenza di tre sole costanti, almeno una dei quali, la durata del mese sidereo, approssimativamente nota. Domanda: il metodo funzionerebbe con gli assai più precisi valori oggi noti? **(8)**

iii) Un ulteriore metodo consisteva nella determinazione del baricentro del sistema Terra-Luna. Poiché questo baricentro non è fisso al centro della Terra, ma è in un punto circa 1710 km sotto la superficie terrestre, la Terra, nella sua piccola orbita, vede una parallasse mensile del sole di circa 6.3 secondi d'arco.

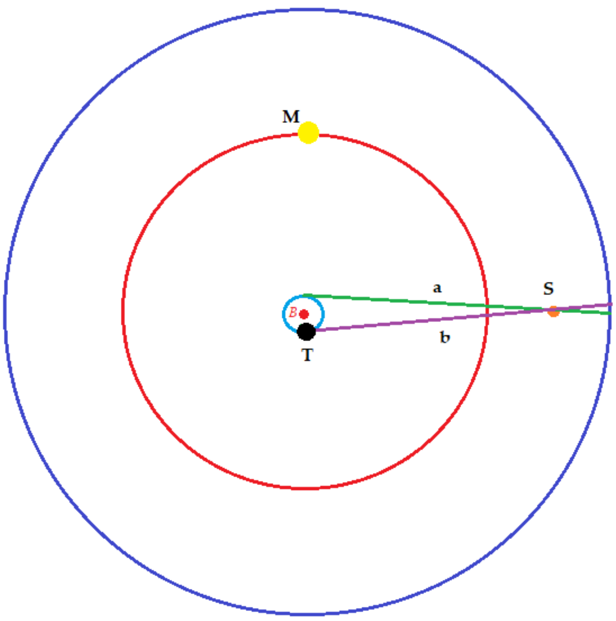

Fig.1

Parallasse solare dovuta all'orbita terrestre intorno al centro di gravità del sistema Terra-Luna (schema non realistico)

Se la Terra fosse un punto T, come in Fig.1, essa compirebbe un'orbita intorno al baricentro Terra-Luna B, stando sempre da parte opposta della Luna M rispetto al baricentro B. In tal caso le due linee di vista (per esempio verso il centro del sole) a e b sottenderebbero ogni mezzo mese lunare un angolo θ, proiettando il Sole sul cielo delle stelle fisse (circolo blu) in due punti diversi. Sfortunatamente la Terra ruota su sé stessa e, peggio ancora, il baricentro B è all'interno della Terra, ma il concetto può essere applicato scegliendo opportunamente il momento e il modo dell'osservazione.

L'articolo di Hughes **(6)** fa delle osservazioni assai oscure: *"l'ampiezza dello spostamento mensile della posizione del Sole è circa **6.3 secondi d'arco**. Così*

$$tan\, 6''.3 \;=\; \frac{a_C}{a_S}$$

In cui a_C *è la distanza media tra la Terra* **(?)** *e il centro di massa del sistema Terra-Luna* ***(circa 4634 km)*** *e* a_S *è la distanza media tra Terra e Sole".* Il solo modo in cui penso che la formula possa essere spiegata è se le misure sono fatte come in figura 2, in cui 6.3" è l'angolo tra s and t, e tra t e u, dove t è la linea retta verso la posizione centrale del Sole. Così 6.3" sarebbe **metà** dell'angolo dello spostamento del Sole in un mese siderale, sullo sfondo delle stelle fisse, l'abituale definizione della parallasse. Sulla carta la cosa sembra semplice, ma tenere conto di tutte le variabili addizionali per fare le osservazioni non è banale.

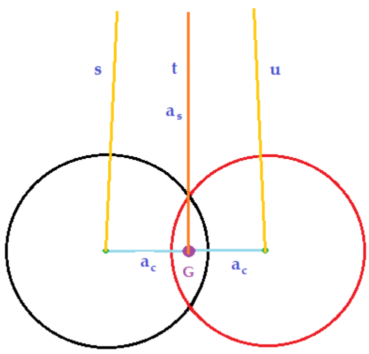

Fig.2

Probabile metodo di misura della parallasse solare secondo Hughes, con la Terra nei due punti estremi di un mese lunare. G è il baricentro del sistema Terra-Luna. Le linee s e u passano per il centro della Terra.

Ulteriore confusione proviene dal fatto che ci viene data la distanza di 4634 km. Nell'articolo essa appare come un dato, ma in realtà è il risultato del calcolo: usando la semplice formula $a_C = θ$ * (distanza del sole) con θ in radianti, risulta un valore $a_C = 4.56\ 10^8$ cm, 4560 km. Il calcolo può essere raffinato e portato a 4634 km, o meglio, all'attuale valore di 4671 km.

Ora, applicando la formula del baricentro

$$a_C\ (M_E + M_L) = a_L\ M_L,$$

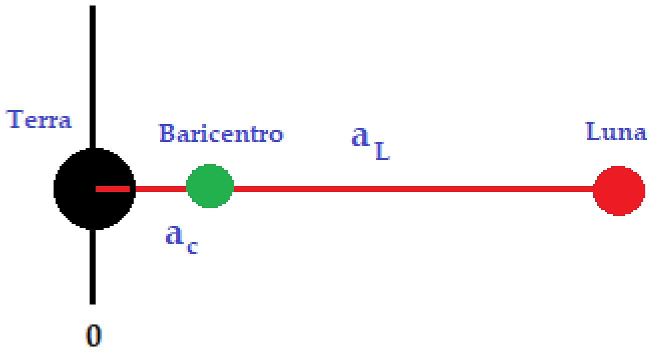

Fig.3

Baricentro del sistema Terra Luna.

Si ottiene: $M_E/M_L = a_L/a_C - 1 = 83.215$, invece di 81, ma di nuovo, il metodo è corretto, va solo applicato meglio. Usando il valore 4671 km, si trova un valore K = 81.295.

Si noti che la piccola orbita della Terra, dovuta principalmente alla Luna, si riflette sulla parallasse di qualsiasi corpo celeste vicino, che, più piccolo è, meglio è. David Gill ottenne un valore K = 81.76 osservando l'asteroide Victoria 12 negli anni 1888-1889. Spencer Jones ottenne un valore K = 81.271 mediante osservazioni di 433 Eros nel 1931.

Ad ogni modo penso che oggi , essendo ben nota la massa della Luna, si usi il suo valore per determinare con precisione la posizione del baricentro (come per ottenere il rapporto tra gli effetti mareali dovuti alla Terra e quelli dovuti al Sole).

(iv) Più complicato è il metodo dedotto dall'osservazione della **nutazione nella precessione degli equinozi.** Con questo metodo , **Stone** (1867) ottenne K = 81.36, **Newcomb** (1897) trovò K = 81.62, **Proctor** (1892), 80.75. Come si vede l'incertezza dei valori ottenibili non compensa la maggior difficoltà matematica.

(v) Altri astronomi, a cominciare da **Leverrier**, calcolarono K dalle **perturbazioni indotte dal sistema Terra-Luna sulle orbite degli altri pianeti,** e altri metodi sempre più complessi furono pure esplorati.

Ma ormai il loro interesse stava diventando puramente accademico. La corsa allo spazio, conclusasi 50 anni fa con l'arrivo dell'Uomo sulla Luna nel 1969, e nel 1972 con la sua definitiva partenza, risolse il problema dando non solo la massa totale della Luna, ma anche molte informazioni sulla distribuzione di massa al suo interno (per esempio i famosi *mascon*, concentrazioni di massa o anomalie gravitazionali positive sotto la superficie lunare)

Per concludere, dò un profilo dei valori di K ottenuti nel tempo **(6).**

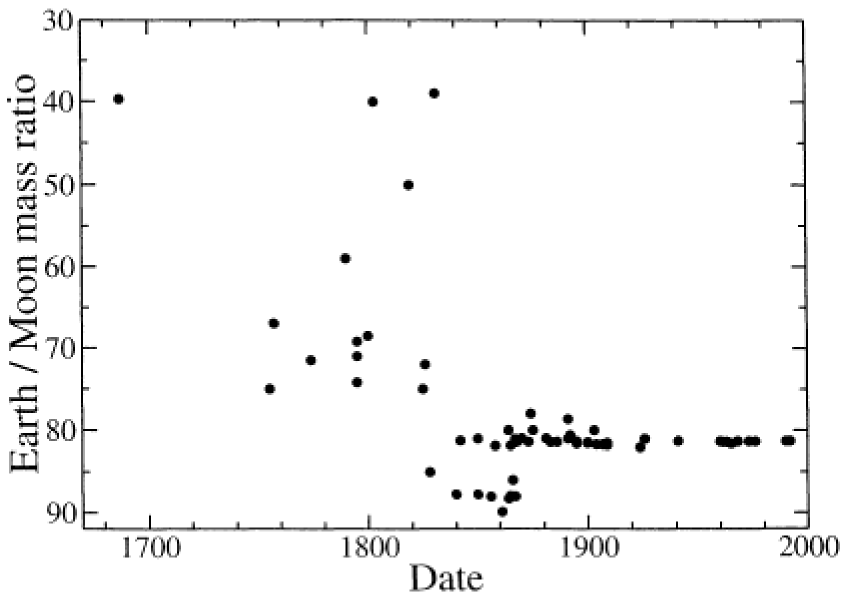

Fig. 4

Variazione nel tempo del rapporto K = M(E)/M(L). Esso, inevitabilmente, si stabilizzò a partire dalla fine degli anni ’60 del secolo scorso.

NOTE

(1) La ragione è che – 40 Fahrenheit è anche -40 Celsius.

(2) Di rado ho trovato tanta confusione come nelle quindici risposte riportate su Quora (edizione americana) a due domande: *How is the mass of the moon calculated?* e “*How do I calculate mass of the moon given that of the Earth?”*. Le più sicure sono le risposte che fanno riferimento a misure fatte con satelliti artificiali circumlunari. Alcuni danno risultati decisamente sbagliati (uno afferma che la massa della Luna è un sesto della massa terrestre, perché l’accelerazione di gravità sulla Luna è un sesto di quella terrestre). Altri rispondono a una domanda diversa (maldestramente unificata da qualcuno alla domanda sulla massa) la quale dava un dato importante, che a 1/9 della distanza fra la Terra e la Luna, vicino alla Terra, i due corpi esercitano uguale forza su un’eventuale razzo. Altri riportano calcoli sbagliati con il risultato giusto. Evidentemente anche su Quora inglese manca qualche persona competente in fisica che elimini le risposte sbagliate. Delusione!

(3) Ponendo L come effetto lunare e S come effetto solare,

$$\frac{massimo\ sizigie}{massimo\ quadrature} = \frac{L+S}{L-S}$$

Newton ottenne i suoi dati sperimentali da Samuel Sturmy a Bristol (42 piedi/25 piedi = 1.68) e da Samuel Colepresse a Plymouth (41 piedi e 23 piedi = 1.78). I risultati erano compatibili. Usando un valore medio tra i due, si ottiene che il valore L/S (effetto della Luna/effetto del Sole) vale 3.74. Newton introdusse un suo fattore chiamato “fudge factor = fattore ad hoc” e pubblicò il risultato 4.4815. Come Newton sia giunto a questo risultato e perché, su dati così incerti, e per di più, introducendo un fattore ad hoc con una giustificazione assai vaga, Newton si sia azzardato a dare quattro cifre decimali è una “vexata quaestio”. Non aveva motivo, per quanto se ne sa, di voler ottenere questo numero. Per ottenere un corretto rapporto, Laplace seguì 17 anni di osservazioni a Brest, e, mentre si perseguivano altri metodi di misurazione della massa lunare, miglioravano anche i valori delle accelerazioni mareali prodotte dal sole e dalla luna.

Dall’articolo di Nicholas Kollerstrom : NEWTON’S LUNAR MASS ERROR, **Jnl of the British Astronomical Association, 1985, 95, 151-3 (vedi: http://www.dioi.org/kn/newtonmoonerror.htm)**

(4) Tutto quello che Newton scrisse fu:

“*But the force of the moon to move the sea varies inversely as the cube of its distance from the earth*.” (Ma la forza della luna per muovere il mare varia inversamente al cubo della sua distanza dalla terra) (**Prop. 37).** In quanto al Sole: “*.. its force to raise the sea is ... inversely as the cube of its distance from the earth*.”(la sua forza per innalzare il mare è inversamente proporzionale al cubo della distanza dalla Terra) (Prop. 36).

Dall’articolo di Nicholas Kollerstrom : NEWTON’S LUNAR MASS ERROR, **Jnl of the British Astronomical Association, 1985, 95, 151-3 (vedi: http://www.dioi.org/kn/newtonmoonerror.htm)**

(5) **La domanda era: “***Quale potrebbe essere il moto di alcuni oggetti sospesi in vari punti all'interno di una navicella sferica in orbita circolare uniforme attorno alla Terra? Si può capire, osservando solo questo moto, se la navicella è in orbita o immobile nello spazio profondo?* ». Si veda se si è interessati.

(6) Hughes, D. W.: Measuring the Moon's mass (125th Anniversary Review)
The Observatory, Vol. 122, p. 61 (2002)
http://adsbit.harvard.edu//full/2002Obs...122...61H/0000070.000.html

(7) Si supponga di avere una Lagrangiana per il moto di due corpi, con V(r) dipendente solo dal modulo della distanza dei due corpi, scritta come:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{r_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r_2}^2 - V(r)$$

Si risolva per r_1 e r_2 il sistema (in cui si pone il baricentro nell’origine):

$$r_1 - r_2 = r$$
$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

La soluzione è (usare la regola di Cramer, se si è alla disperazione):

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}; \; r_2 = -\frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$$

Per cui, mentre V resta immutato, l’energia cinetica diviene: T = $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, dove la massa ridotta è:

$$\mu = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}$$

Si noti che se nel potenziale V compaiono le masse m_1 e m_2, esse non vengono modificate.

Con questa trasformazione, ad esempio, il moto di due corpi che si attraggono reciprocamente viene trasformato nel moto di un corpo di massa ridotta μ attratto dall'origine.

(8) A me, con i valori più precisi che ho trovato – ricerca non approfonditissima – usando il metodo di Airy è venuto 104.391 invece di 81). Sono d'accordo con Airy nel lasciar perdere. Forse fra qualche anno si potrà far meglio, se lo si vorrà.