ORBITE DEI PIANETI

Risposta a una domanda comparsa su Quora:

Perché le orbite dei pianeti attorno alla propria stella sono ellittiche e non circolari? Se esiste un afelio e un perielio significa addirittura che, nel caso del nostro sistema solare, il Sole non si trova affatto al centro, ma appunto decentrato.

La domanda sembra ispirata da un diagramma, che si trova frequentemente a illustrazione della prima legge di Kepler, la quale afferma che le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei fuochi e quindi sarebbe naturalmente fuori centro.

Tuttavia non c'è alcuna legge di Keplero o di altri che affermi che il Sole è precisamente al centro del sistema solare. Il nome "Sistema Eliocentrico" non è una legge fisica, ma è solo un nome che dà una vaga nozione generale del sistema solare, nel senso che "i corpi del sistema solare girano intorno al Sole".

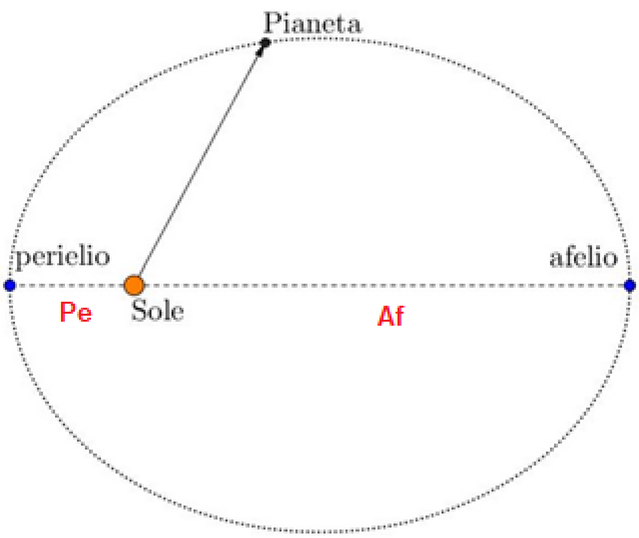

Fig.1
Orbita planetaria assai idealizzata.

D'altra parte sia chiaro che nessuno degli otto pianeti "canonici" ha un'orbita che assomiglia anche vagamente a quella di Fig.1. Le comete e altri corpi celesti possono avere orbite anche assai più allungate, se non addirittura paraboliche o iperboliche, ma non sono incluse nella domanda. Plutone è un caso limite e difatti rischia sovente la degradazione da pianeta ad altro corpo celeste. Invece, ad esempio, i quattro pianeti più interni hanno orbite come in Figura 2:

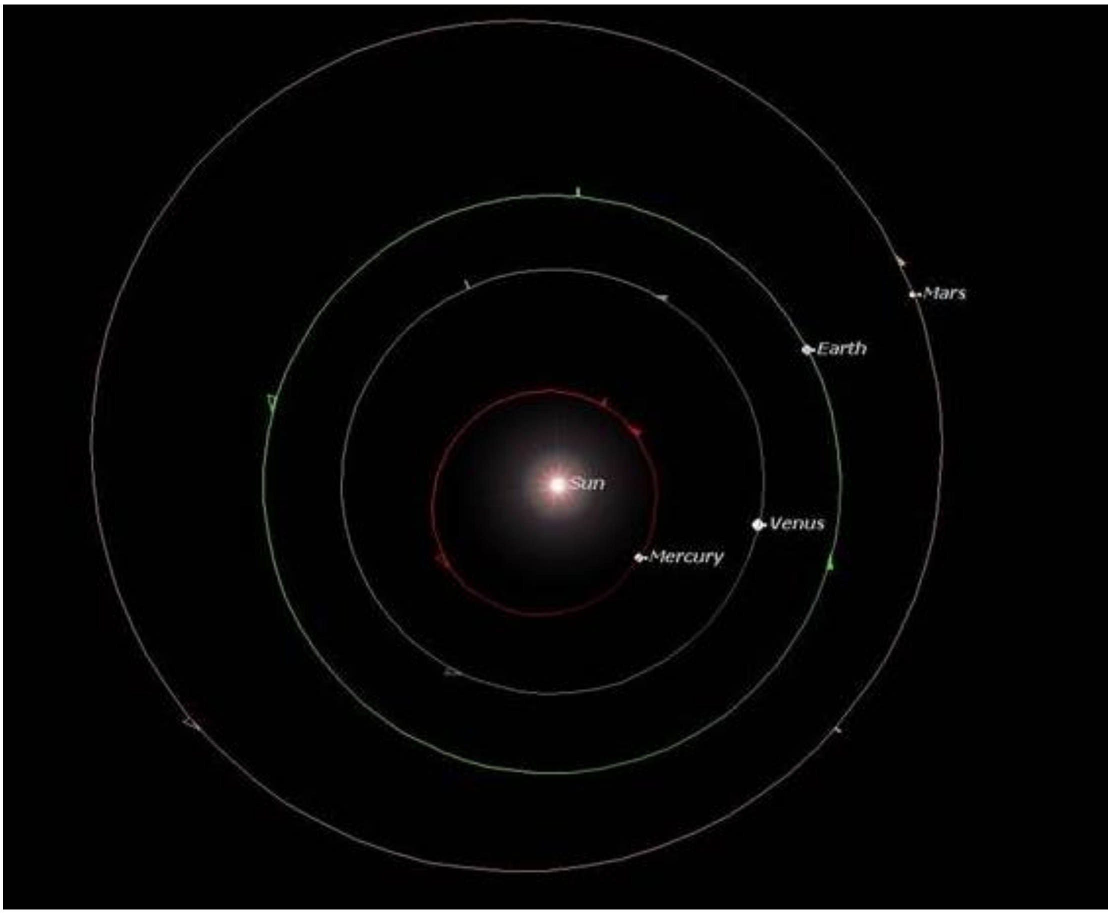

Fig.2
Le orbite dei quattro pianeti Mercurio-Marte sono quasi dei cerchi.
(http://planetary-science.org/mars-research/orbit-of-mars/)

Di fronte a questo diagramma, molti si chiedono piuttosto come mai le orbite dei pianeti siano quasi circolari, dal momento che la prima legge di Keplero dichiara che si tratta di ellissi.

Infatti, è difficile a prima vista notare che **non** si tratta di cerchi, se non fosse per il fatto che il sole, soprattutto nel caso di Mercurio (Eccentricità e = 0.206, la maggiore degli otto pianeti canonici), è decisamente fuori centro. Ma l'orbita di Venere (e = 0.007) è un cerchio quasi perfetto, quella della Terra poco meno (e = 0.017), e quella di Marte, la seconda orbita più eccentrica degli otto pianeti (e= 0.093), appare più come un cerchio fuori centro che come l'ellisse di Fig. 1.

La risposta alle due opposte domande è più o meno la stessa.

Le distanze dell'afelio (Af) e del perielio (Pe) (https://it.wikipedia.org/wiki/Leggi_di_Keplero) differiscono di un valore

Af-Pe = 2 a e

In cui ***a*** *è il semiasse maggiore*, che è anche normalmente indicato come *distanza media* a = (Af + Pe)/2, e l'eccentricità è **e**. Possiamo prendere questa formula come definizione dell'eccentricità, che è nulla quando Af = Pe (cioè l'ellisse è diventata un cerchio).

Le orbite planetarie sono determinate dalle leggi della meccanica celeste. Le leggi di Keplero ne sono solo la conseguenza.

Come è noto, il problema della determinazione delle orbite planetarie richiede la soluzione di due equazioni differenziali, una che riguarda la parte radiale, e determina come varia in funzione del tempo la distanza del pianeta dal Sole (o meglio, dal baricentro del sistema pianeta-sole, che però è a poca distanza (480 km) dal centro del Sole); una seconda che riguarda la parte angolare, cioè la posizione del pianeta sull'orbita.

Questa seconda equazione viene risolta sulla base della conservazione del momento angolare. Se non vogliamo addentrarci in una discussione che può diventare complicata, possiamo semplicemente utilizzare la seconda legge di Kepler: *«Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.»*

Usando una formula o due, a seconda del livello di matematica raggiunto, la stessa legge può essere riformulata come "il momento angolare L del pianeta in orbita intorno al Sole è costante". Non lo era certamente ai primordi del sistema solare, quando frequenti collisioni con corpi in varie orbite aggiungevano o toglievano energia e momento angolare al pianeta. Lo è adesso, quando i giochi sono praticamente fatti. Ho notato che, avendo in mente una raffigurazione del sistema solare con pianeti disegnati in proporzioni sbagliate rispetto al Sole, con distanze ravvicinate, e le orbite disegnate, non ci si rende conto di quanto sia vuoto il sistema solare: una stella centrale e pochi puntolini sparsi, a enormi e crescenti distanze gli uni dagli altri.

La seconda versione della seconda legge di Kepler permette di includere nel moto radiale un termine dovuto al moto angolare. Infatti sappiamo che il momento angolare di un corpo di massa m, distanza (variabile) r, e velocità angolare (variabile) ω è

$$L = mvr = m\omega r^2$$

La forza centrifuga, che normalmente scriviamo $m\omega^2 r$, può essere espressa in termini di L (quantità conservata, cioè costante), e facendo scomparire ω (quantità normalmente variabile), a favore del raggio r (anch'esso variabile):

$$F_c = m\omega^2 r = \frac{(m\omega r^2)^2}{mr^3} = \frac{L^2}{mr^3}$$

Si noti che questa forza è positiva, cioè spinge la particella verso il senso positivo dell'asse r, verso l'esterno. Si tratta di una forza fittizia, ma nondimeno sufficiente a respingere la particella dal cadere sul centro di attrazione, beninteso, a meno che L sia zero. Da una tale forza si risale al potenziale con un semplice integrale, cambiato di segno:

$$V_c = + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Aggiungiamo ora una legge che tutti conosciamo, non inclusa fra le leggi di Keplero, **la conservazione dell'energia:**

(energia cinetica dovuta al moto radiale) + (energia ***positiva, cioè repulsiva,*** *dovuta al moto angolare) + (Energia potenziale* ***negativa, cioè attrattiva,*** *dovuta alla forza di attrazione gravitazionale) = E totale, costante.*

$$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + (\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM}{r})$$

Grazie alla conservazione del momento angolare, abbiamo eliminato le variabili angolari e la massa m si muove in un potenziale effettivo, dato dalla somma degli ultimi due termini. Vediamo allora il pianeta muoversi lungo il raggio con una certa velocità. Se la velocità radiale è eguale a zero, ciò significa che il raggio dell'orbita è fisso, cioè il moto è circolare. Anche in questo caso, naturalmente, resta una porzione di velocità, la velocità angolare, che è parte del potenziale effettivo.

Facciamo ora un diagramma degli ultimi due termini, il cosiddetto potenziale effettivo (V', in rosso) in cui si muove il pianeta:

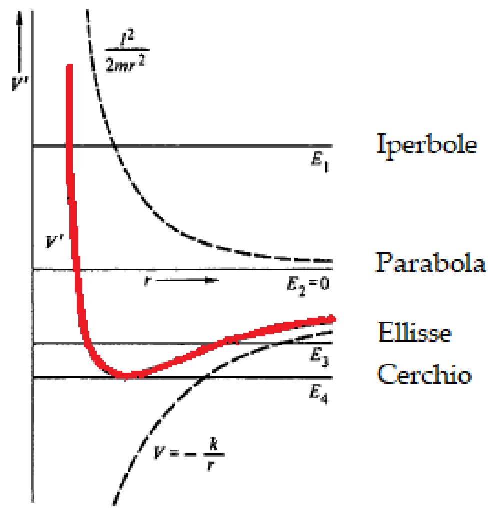

Fig.3
Grafico del potenziale effettivo per l'equazione radiale.

Dunque l'esistenza di orbite ellittiche, paraboliche e iperboliche deriva dal valore dell'energia totale E, rappresentata nel diagramma da linee orizzontali. L'energia totale E deve essere sempre eguale o maggiore di V', potenziale effettivo, altrimenti la differenza E-V' è negativa. Ma questa differenza è l'energia cinetica radiale, e un'energia cinetica negativa è impossibile in meccanica classica.

La curva V', rossa, per valori di E inferiori a zero, ha due intersezioni con le varie orizzontali che indicano l'energia totale: a sinistra sono i perieli, e destra gli afeli. Il punto medio tra afelio e perielio è il semiasse maggiore. Ci sono dunque molte possibilità per un pianeta di avere un'energia totale che gli permette di avere un afelio molto maggiore di un perielio, e quindi orbite altamente ellittiche.

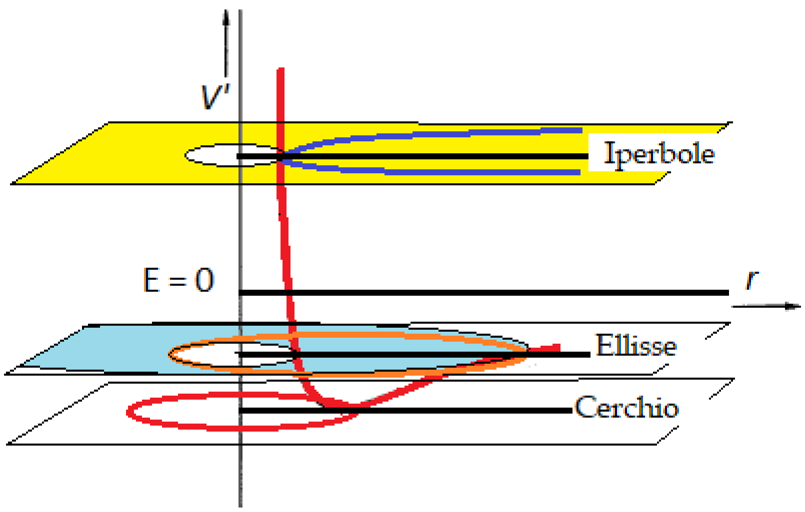

Fig.4.
Come il diagramma in fig.3 si riflette sulla forma delle orbite. L'area bianca non è permessa. Quindi il cerchio non può avere altro che il raggio corrispondente al minimo del potenziale effettivo. L'ellisse è confinata all'area azzurra, tra perielio, qui a sinistra dell'asse delle ordinate, e afelio. Infine l'iperbole è esclusa da un cerchio vicino all'asse delle ordinate, ma può spaziare sul piano fino all'infinito. La parabola avrebbe un diagramma simile a quello dell'iperbole, sul piano E=0, ma con il perielio a sinistra dell'asse verticale, come l'ellisse.

Addirittura, se la legge di forza differisse anche di poco dalla legge -1/r^2, potremmo non avere orbite chiuse.

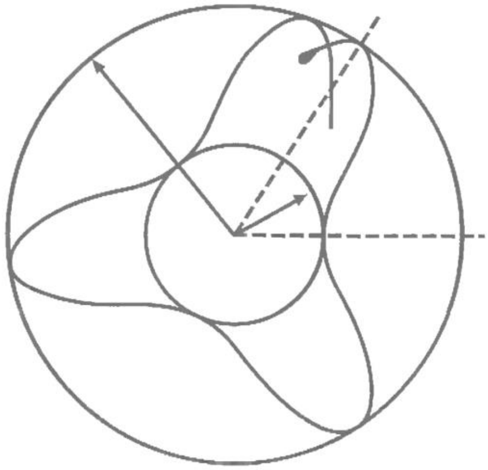

Fig.5

Dalla copertina della “Classical Mechanics” di H. Goldstein, III Edizione. A causa di una diversa legge di forza attrattiva, le orbite non sono chiuse, ma il moto si svolge pur sempre tra un afelio e un perielio.

Ma….

Nel diagramma ingrandito in Fig. 6, la linea verde corrisponde all’orbita di Mercurio, in cui la differenza fra afelio e perielio dovrebbe corrispondere a 2*0.2 * a.

Dunque l’esistenza di orbite ellittiche, paraboliche e iperboliche deriva dal valore dell’energia totale E, rappresentata nel diagramma da linee orizzontali. L’energia totale E deve essere sempre eguale o maggiore di V’, potenziale effettivo, altrimenti la differenza E-V’ è negativa. Ma questa differenza è l’energia cinetica radiale, e un’energia cinetica negativa è impossibile in meccanica classica.

La curva V’, rossa, per valori di E inferiori a zero, ha due intersezioni con le varie orizzontali che indicano l’energia totale: a sinistra sono i perieli, e destra gli afeli. Il punto medio tra afelio e perielio è il semiasse maggiore. Ci sono dunque molte possibilità per un pianeta di avere un’energia totale che gli permette di avere un afelio molto maggiore di un perielio, e quindi orbite altamente ellittiche.

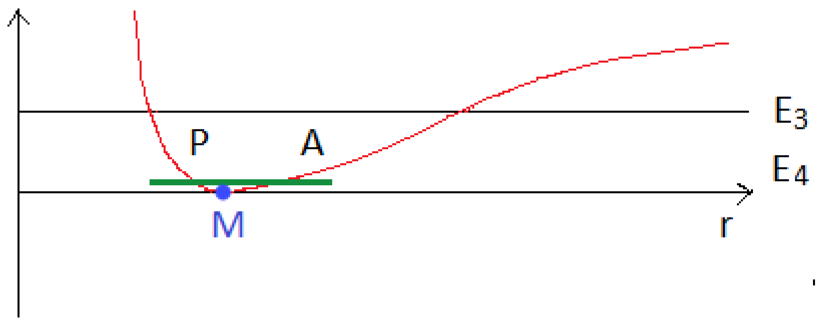

Fig.6

Ingrandimento della regione del minimo. Tutti gli otto pianeti hanno energia vicino al minimo possibile.

Tutti gli otto pianeti sono compresi fra la linea verde e il minimo. Ma questa è la parola magica. Per la maggior parte i sistemi fisici, anche quantistici, che noi osserviamo, occupano uno stato quanto meno vicino a quello di minima energia. Questo non avviene per un loro libero arbitrio, ma perché il minimo di energia - normalmente - è un punto di equilibrio stabile. Una volta che un sistema giunge a un punto di equilibrio stabile è difficile per lui abbandonarlo: nel nostro caso, se la particella *m* abbandona il minimo M per qualche perturbazione, subito interviene una di due forze (le pendenze della curva V'), che tende a riportare la particella al minimo, proprio come una biglia in una conca tende a stare nel punto più basso **(1).** Quando si osserva un sistema, è più probabile che la sua energia sia vicino al minimo, piuttosto che altrove, perché è lì che tende a permanere più a lungo. Anche le orbite planetarie sono vicine al minimo, cioè all'orbita circolare, e non per caso: a quanto pare l'energia è più facile perderla che trovarla. Non sono esattamente al minimo, perché evidentemente hanno subito perturbazioni di qualche genere. Perderanno a poco a poco l'eccesso di energia rispetto al minimo? Può darsi.

Quindi questa risposta dovrebbe da un lato spiegare perché le orbite dei corpi celesti nel sistema solare possono essere anche molto ellittiche, e dall'altro perché tendano comunque a essere circolari.

NOTA.

(1) Coloro che conoscono la meccanica dei sistemi oscillanti, possono notare che intorno al minimo di potenziale effettivo e di energia (in effetti presso la maggior parte dei minimi di potenziale,) uno sviluppo in serie di V' ha un termine costante (irrilevante nella teoria del potenziale), mentre manca il termine di primo grado, caratteristica di un punto estremo (minimo, massimo o punto di flesso). In definitiva il termine più importante, di norma, è quello di secondo grado, per cui il potenziale nei pressi del minimo è approssimabile con una *parabola* (ciò che del resto si vede anche a occhio). Questo è il potenziale dell'**oscillatore armonico**, e quindi ci aspettiamo che l'orbita di un pianeta vicino al minimo (eccentricità nulla) soggetto a piccole perturbazioni oscilli radialmente, trasformandosi in *orbite di piccola eccentricità oscillante* nel tempo.