

# PICCOLE STELLE

Risposta alla domanda su Quora:

*Quanto può essere piccola una stella?*



Cielo stellato dal mausoleo di Galla Placidia, Ravenna.

**Front illustration:**

Author: Jessica fraccaroli

This file is licensed under the [Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.

## Risposta breve:

Per quanto riguarda il **RAGGIO**, le **stelle di neutroni**, con raggio di circa 10 km, sono le più piccole stelle oggi osservate (primariamente in emissione radio ed emissione X. Sei di loro, incominciando con la pulsar della Nebulosa del Granchio, hanno anche una controparte ottica (2018)). La più piccola pulsar nota, in raggio, è oggi **PSR J0348+0432**, con raggio **R = 6.5 km = 10<sup>(-5)</sup> RS** (raggi solari).

Raggi stellari inferiori a 10 km (circa 8 km, ma anche, secondo certi modelli, nell'ordine delle decine di metri **(1)**) sono stati ipotizzati per **stelle di quark "liberi"**, cioè non legati da gluoni in "adroni" (particelle "elementari" composte da due o più quarks e suscettibili di "interazioni forti"), ma confinati dalla gravità, per le quali esistono finora solo dei candidati, quali, ad esempio, **3C58, XTE J1739-285, PSR B0943+10**.

Come le stelle di neutroni sarebbero in certo senso dei *nuclei giganti*, così le stelle di quark, in bilico fra stelle di neutroni e buchi neri, sarebbero degli *adroni giganti*. Tuttavia, l'esistenza di stelle di quark non è confermata né teoricamente né sperimentalmente.

Per quanto riguarda la **MASSA**, tenendo conto del fatto che la massa di Giove è 0.00095 MS, le più piccole stelle osservate sono nane brune, con masse dell'ordine di decine di masse di Giove (MG). La più piccola (2018) sembra essere **EBLM J0555-57Ab**, con **0.081 MS**. [https://en.wikipedia.org/wiki/EBLM\\_J0555-57](https://en.wikipedia.org/wiki/EBLM_J0555-57). Il raggio è dell'ordine di quello del pianeta Saturno, **58232 km**. Essa fu scoperta nel 2017. Tuttavia, sulla stessa Wikipedia si trovano anche Luhman 16 A e Luhman 16 B, nane brune di massa pari a circa 30 MG (Masse di Giove), circa 3 10<sup>(-2)</sup> MS. Il sistema Luhman fu scoperto tra in 2009 e il 2011.

Esiste un **LIMITE TEORICO PER LA MASSA MINIMA DELLE STELLE**, cioè corpi celesti in grado di mantenere una fornace a fusione nucleare, che vale **0.0125 masse solari** (MS). Cercherò di illustrare nel commento, vedi sotto, come si giunga a questo limite.

## Commento

### Dati astronomici (usati qui):

Raggio solare (RS): 695 700 km = 6.96 10<sup>10</sup> cm (circa 7 10<sup>10</sup> cm)  
Massa solare (MS): 1.99 10<sup>33</sup> g (circa 2 10<sup>33</sup> erg/s)  
Densità media del sole (ρ<sub>S</sub>): 1.4 g/cm<sup>3</sup>  
Luminosità solare (LS): 3.8 10<sup>33</sup> erg/s (circa 4 10<sup>33</sup> erg/s)  
Massa di Giove (MG): 1.9 10<sup>30</sup> g = 0.9458 10<sup>(-4)</sup> MS (circa 0.001 MS)  
Raggio di Giove (RG): 6.99 10<sup>9</sup> cm = 0.1 RS  
Massa della Terra (MT) : 5.97 10<sup>27</sup> g = 3. 10<sup>(-6)</sup> MS  
Raggio della Terra (RT) : 6.371 10<sup>8</sup> cm = 0.0092 RS (circa 0.01 RS)  
1 anno = 3.16 10<sup>7</sup> s

## I. Introduzione.

La domanda è difficile da interpretare.

Può significare:

B) "Qual è la stella più piccola attualmente nota?"

A) "Qual è la massa minima di una stella (limite teorico)?"

Inoltre, la domanda non specifica che cosa si intenda per piccolezza di una stella, che può essere (i) poco luminosa (non tratteremo questo caso se non di sfuggita), (ii) piccola in volume o raggio, e (iii) piccola in massa.

Una stella rappresenta *l'esperimento della Natura di far collassare una massa di polvere/gas e di vedere se il collasso si arresta o no.*

**La storia delle stelle** incomincia in genere con **nubi molecolari** che tipicamente hanno masse di 6 milioni di  $M_{\odot}$ , Temperature di 10 K, diametri di 100 anni luce e densità di  $100 \text{ particelle cm}^{-3}$ . Esistono varie tipologie di nubi e varie tipologie di meccanismi che iniziano il collasso gravitazionale di addensamenti delle nubi molecolari. La fase di **protostella** incomincia quando un frammento di nube molecolare collassa sotto l'azione della propria gravità e si forma un addensamento opaco alla radiazione, di massa che oggi si pensa di poco superiore alla futura stella. La **massa** della nuvola protostellare e la sua composizione (generalmente data da tre variabili, X – percentuale in massa di idrogeno; Y – percentuale in massa di Elio; Z – percentuale di altri elementi) sono i parametri principali. Rotazione e campo magnetico possono comportare variazioni non piccole nell'evoluzione.



Fig. 1.

*“Pillars of Creation” (Pilastrini della creazione), così chiamati perché si pensa che vi si stiano formando delle stelle. I pilastrini sono composti da idrogeno molecolare freddo e polvere che vengono erosi per fotoevaporazione ad opera della luce ultravioletta di stelle relativamente vicine e calde. La porzione di fotografia corrisponde trasversalmente a circa un quarto di anno luce in dimensioni reali. Le sporgenze simili a dita nella parte superiore delle nuvole sono più grandi del nostro sistema solare (circa 100 AU) e sono rese visibili dalle ombre di Globuli Gassosi in Evaporazione (EGG), che proteggono il gas dall'intenso flusso UV. Taluni EGG sono essi stessi incubatori di nuove stelle. Le stelle emergono da questi EGG, che in seguito evaporano del tutto.*

La Natura ha a disposizione una forza sempre attiva che provoca il collasso, la gravitazione, e due principali strumenti per arrestare il collasso gravitazionale:

1) la pressione di radiazione prima termica e poi essenzialmente prodotta da fusione nucleare (che non deve essere troppo alta, o la pressione di radiazione distrugge la stella - luminosità limite di Eddington (1926?)),

2a) la repulsione esercitata dal “principio di esclusione di Pauli”, che in stelle di masse inferiore a 1.44 MS (limite calcolato da Chandrasekhar nel 1920), impedisce agli elettroni di occupare il posto già occupato da altri, producendo delle stelle **nane bianche**. *Elettroni dominati dal principio di esclusione e costretti ad occupare stati di alta energia senza poterla perdere, sono detti “degeneri”.*

2b) se la massa è più alta, il principio di esclusione applicato agli elettroni non è sufficiente ad arrestare il collasso, gli elettroni entrano per così dire nei protoni, e la Natura ci riprova applicando il principio di esclusione ai nucleoni, e producendo **stelle di neutroni**. A queste si applica un altro limite, di (Tolman) -Oppenheimer -Volkoff (1939). Il limite risultò di 0.7 MS, ma calcoli riveduti lo portano fino a 3 MS. Anche i neutroni di una stella di neutroni sono “*materia degenera*”.

Se anche questo strumento fallisce, la natura non ha altri mezzi, e la stella continua il collasso in un **bucco nero**. Tuttavia si pensa che il 97% delle stelle, o perché di piccola massa fin dall'inizio – la maggioranza, o perché hanno disperso gran parte della loro massa in esplosioni o in altro modo, finisca nel caso 2a, cioè come nana bianca.

A parte questo risultato generale, della prevalenza finale delle nane bianche, lo studio del collasso gravitazionale mediante lo studio della struttura stellare, ha portato a questi risultati:

**0)** Sembra esistere un limite superiore alla massa che una stella può assumere. **R136a1**, nella LMC (Grande Nube di Magellano), al momento, 2018, è la stella di maggior massa e luminosità nota: Massa, **315 MS**;  $L$ , luminosità, 8.7 milioni di volte  $L(\text{sole})$ . Di qui innanzi  $L(\text{Sole})$  sarà scritta  $LS$ . Non è detto che non possano esistere stelle di massa ancora superiore. Non esiste per ora una teoria che definisca un *preciso* limite insuperabile alla massa delle stelle, e si pensa che sia appunto dell'ordine di circa cento masse solari. In

parte, questa conclusione è legata al limite alla *Luminosità* posto da Eddington, che per una stella di  $315 M_{\odot}$  sarebbe 10 milioni di volte la luminosità solare (2). Vedremo più avanti come da questo concetto si possa giungere a limiti (imprecisi) sulla massima massa delle stelle.

1) Stelle massicce ( $M > 40 M_{\odot}$ ) evolvono rapidamente e collassano senza limite in buchi neri, se non riescono a liberarsi della maggior parte della loro massa in un'esplosione (Supernova di Tipo II). Nella fase finale si può avere emissione di raggi X dalle regioni che circondano il buco nero.

2) Stelle di massa tra 8 e  $40 M_{\odot}$  evolvono meno rapidamente e, passando per la fase di Supernovae di tipo II, diventano stelle di neutroni, per lo più radio pulsar.

L'esplosione di una Supernova di Tipo II lascia un resto (*Supernova Remnant*, SNR) di vita breve (da qualche migliaio di anni a circa 30000 anni e oltre, a seconda dei vari modelli e delle varie versioni di wikipedia).

3) Stelle di massa tra 0.8 e  $8 M_{\odot}$  evolvono più lentamente e, esauriti i processi di fusione nucleare, diventano nane bianche, con massa inferiore a  $1.4 M_{\odot}$  ("limite di Chandrasekhar", per nane bianche non rotanti). Le nane bianche non producono più energia per processi di fusione.

All'inizio, l'interno di una nana bianca può essere equiparato a un plasma. Esse emettono radiazione da energia termica residua dagli strati superficiali, *non degeneri*, della stella, che si esaurisce progressivamente. Infatti, per alta che sia l'energia delle particelle degeneri, esse non possono irradiarla, perché così facendo dovrebbero occupare gli stati di elettroni di più bassa energia, contro il principio di Pauli.

Quando tutta l'energia residua sarà stata spesa, la nana bianca incomincerà a cristallizzarsi partendo dal nucleo, e diventerà una nana nera fredda. Il 97% delle stelle presenti nella nostra Galassia è probabilmente destinato a questa fine. Tuttavia, il processo è assai lento, e non si pensa che, nella vita dell'universo ( $13 \cdot 10^9$  anni o 13 Gyr), si siano già formate nane nere.

4) Stelle di massa tra 0.08 e  $0.8 M_{\odot}$  sono Nane Rosse ed evolvono lentissimamente. Nessuna stella di massa inferiore a  $0.5 M_{\odot}$  ha avuto tempo di evolversi fino al suo stato finale (presumibilmente di nana bianca) nei 13 Gyr di vita dell'Universo.

5) Stelle di Massa tra 0.0125 e  $0.08 M_{\odot}$  sono Nane Brune. Come già detto, si pensa che nella vita dell'universo nessuna di queste stelle abbia avuto il tempo sinora di spegnersi evolvendosi in una nana nera di piccola massa.

6) Se il limite alla Massa massima di una stella è poco noto, tanto osservazionalmente quanto teoricamente, è invece abbastanza evidente l'esistenza di un **limite inferiore alla massa di una stella**. Accurati calcoli (i cui principi cercherò di spiegare più avanti), affermano che la massa minima è circa  $0.0125 M_{\odot}$ .

Dal punto di vista delle masse, la seguente mappa può indicare come sono collegate evolutivamente le varie fasi della vita delle stelle. Non sono rappresentate qui tutte le varietà, soprattutto quelle di breve durata, perché l'interesse di questo saggio è nelle stelle più piccole possibili. Queste possono solo trovarsi vicine ai lati Sud e Est del diagramma, dove troviamo buchi neri, eventualmente accompagnati da emissione x, radio-pulsar, nane bianche, nere, rosse o brune. Si tratta quindi o di stelle che hanno dissipato gran parte della loro massa in radiazione ed esplosioni, o di stelle che stanno procedendo lentamente nella fusione nucleare che la loro piccola massa permette (in basso e/o a destra nello schema).

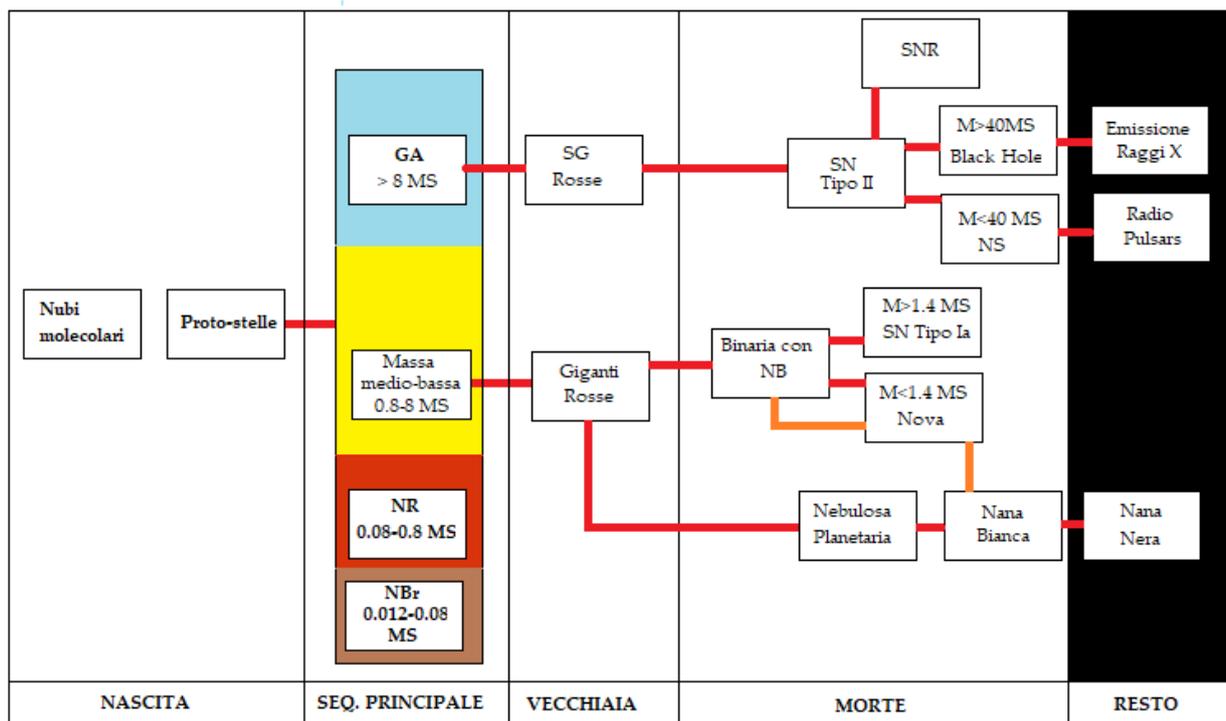


Fig.2. Schema dell'evoluzione delle stelle, (da [https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar\\_evolution](https://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_evolution))

Segle utilizzate:

GA: Giganti Azzurre

GR: Giganti Rosse

NB: Nane Bianche

MS: Masse solari

NBr: Nane Brune

SG : Supergiganti

SN: Supernova

SNR: (Supernova Remnant) Resto di Supernova.

## II. Scale dei tempi.

Vorrei ora dare un'idea delle scale dei tempi. L'età dell'Universo, cioè il tempo decorso dal "Big-Bang" è  $13.8 \cdot 10^9$  anni, secondo le più accreditate teorie. (D'ora in avanti scriverò Gyr, giga-year, in luogo di  $10^9$  anni. Quindi l'età dell'universo è 13.8 Gyr).

Il Sole è nato piuttosto tardi, ed avrebbe solo 4.5 Gyr di età.

La durata della fase di **protostella**, con collasso fino a raggiungere la **Sequenza Principale** (3) è assai rapida, e varia da 10 000 000 di anni per stelle come il sole, a circa 100 000 anni per stelle con  $M = 15 M_{\odot}$ .

La stella atterra sulla **sequenza principale** e ci resta la maggior parte della sua vita, quanto le sue riserve di "combustibile nucleare" permettono. Il Sole, come si è detto, ci è restato 4.5 Gyr, ed è a metà della sua permanenza, che sarà forse di 9 Gyr. Per le varie stelle, il tempo di permanenza sulla sequenza principale, in opportune unità, è dato dal rapporto fra Massa e Luminosità ( $E = mc^2$  !!). Ma solo una piccola frazione, qualche 0.1% della massa della stella è convertita in luminosità, il che, per una stella come il Sole, ridurrebbe il tempo sulla sequenza principale a circa 10 Gyr (4). Inoltre, (vedi III) esiste una legge semi-empirica che lega la luminosità alla massa di una stella. Poiché questa afferma che all'incirca  $(L/L_{\odot}) \cong (M/M_{\odot})^{3.5}$ , ne segue che

$$(Tempo\ sulla\ SP) = 10\ Gyr \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.5}.$$

che, per il Sole, dà circa 10 Gyr, coerente con la stima già data. Questo dice che una stella di  $10 M_{\odot}$  sta sulla sequenza principale  $1/300$  del tempo solare, 30 milioni di anni invece di dieci miliardi. Una stella di  $10^{-1} M_{\odot}$  ci starebbe 300 volte il tempo solare, 3 000 Gyr, 230 volte l'età dell'universo. Nessuna stella di piccola massa può dunque essersi già spenta.

Le stelle di massa medio-piccola, come il Sole, passeranno poi 1 Gyr nella fase di giganti rosse, e 100 Milioni di anni in una successiva "breve" fase di giganti gialle, non in figura.

Si pensa che la successiva fase di **nebulosa planetaria** duri circa 10000 anni.

Ancora meno (qualche migliaio di anni) durerebbe un **Resto di Supernova**, secondo it.wikipedia. Mi pare poco. La dissoluzione significa che il gas, che viaggia a 30 000 km/s all'esplosione, deve rallentare alla velocità del gas interstellare (intorno a 10 km/s).

Secondo en.wikipedia a questo si arriva in circa 30 000 anni, secondo altri, in un tempo dieci volte superiore.

### III. Che cosa è una stella piccola? Stelle piccole in Massa e Raggio

Per quanto riguarda raggio e luminosità, essi sono dati nel diagramma in Fig.3. Per quanto riguarda la massa, fortunatamente esiste, per la sequenza principale, una semplice (e approssimata) relazione tra massa e luminosità. La legge (scoperta assai per tempo, da J.K.E. Halm, e annunciata nel 1911) è una legge di potenza, con esponente  $a$ .

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^a$$

Dove  $a$  è un esponente che varia poco per la sequenza principale tra  $M = 0.43 M(\text{sole})$  e  $20 M(\text{sole})$ . Qui  $a$  varia tra 4 e 3.5, e di solito si utilizza  $a = 3.5$ . A noi, però, importano le piccole masse, inferiori a  $0.43 M(\text{sole})$  per le quali la legge è

$$\frac{L}{L(\text{sole})} = 0.23 \left( \frac{M}{M(\text{sole})} \right)^{2.3}$$

Il seguente diagramma indica le classi principali di stelle, con le più piccole – in raggio e in massa - a me note (2018).

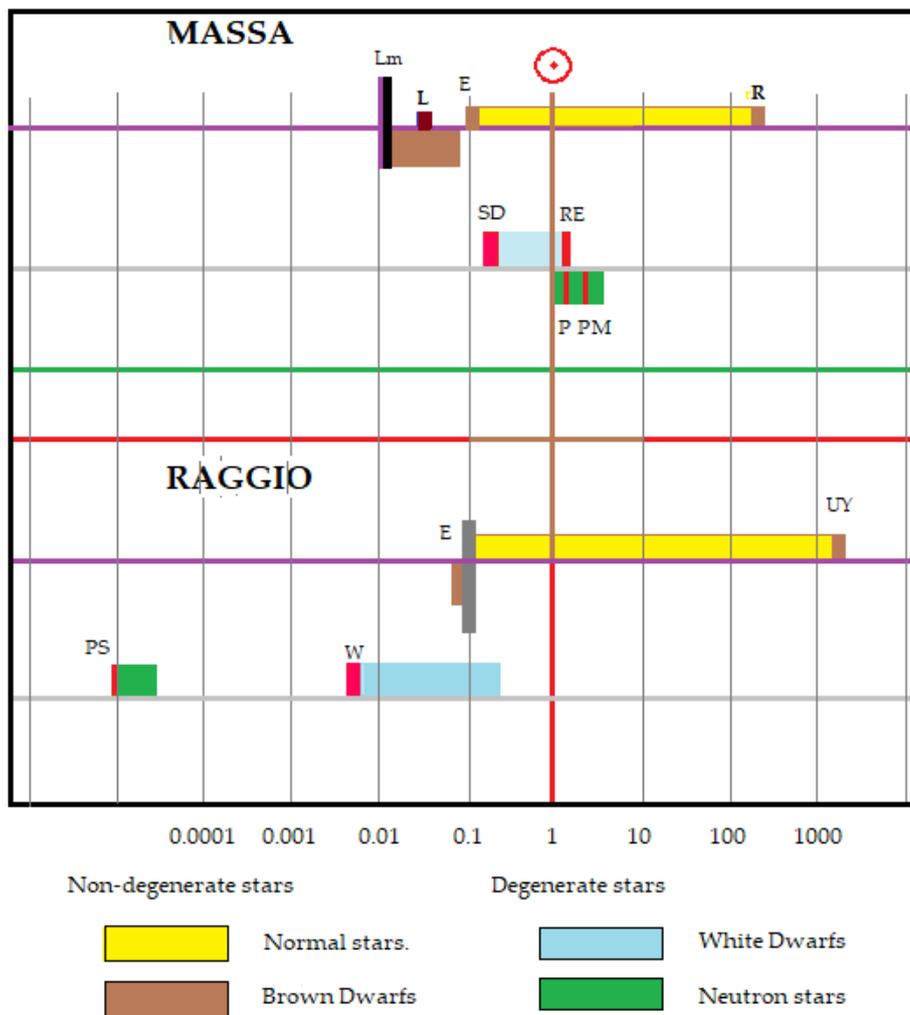


Fig.3

NOTE alla figura 3, in gran parte tratta da [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_star\\_extremes](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_star_extremes).

- E: EBLM J0555-57Ab, la più piccola **nana bruna**,  $M = 0.08 M_{\odot}$ ; Raggio: 58232 km.  $0.08 R_{\odot}$
- $M_{\text{lim}}$ : limite teorico alla **minima massa delle stelle**, circa  $0.0125 M_{\odot}$ ,  $13 M_{\text{J}}$ ,  $2.5 \cdot 10^{31}$  g.
- L: Luhman 16 A e 16 B, le più vicine nane brune e anche le più piccole note, con masse rispettivamente pari a 33 e 28  $M_{\text{J}}$  (Giove).
- P: PSR J0737-3039B, la meno massiccia stella di neutroni:  $1.25 M_{\odot}$
- PM: PSR J0348+0432, la più massiccia stella di neutroni,  $2.01 M_{\odot}$
- PS: PSR J0348+0432, la più piccola pulsar,  $R = 6.5$  km,  $10^{(-5)} R_{\odot}$ .
- R: R136a1, nella LMC (Grande Nube di Magellano) sembra essere la stella di maggior massa e luminosità nota. Massa,  $315 M_{\odot}$ ; L, 8.7 milioni di volte  $L_{\odot}$ . Il limite superiore alla massa delle stelle non è ben noto. In parte è dovuto al limite alla *Luminosità* posto da Eddington, che per una stella di  $315 M_{\odot}$  sarebbe 10 milioni di volte la  $L_{\odot}$ .
- RE: RE J0317-853 più massiccia nana bianca nota,  $1.35 M_{\odot}$ .
- SD: SDSS J091709.55+463821.8 (WD J0917+4638), meno massiccia nana bianca nota,  $0.17 M_{\odot}$
- UY: UY Scuti, la stella di maggior raggio nota, raggio  $1700 R_{\odot}$
- W: GRW +70 8247, più piccola nana bianca nota,  $R = 3300$  km,  $0.005 R_{\odot}$

### III. Il limite teorico alla massa minima di una stella.

Un corpo celeste, per essere qualificato come stella deve essere stato almeno in passato la sede di una fornace a fusione nucleare. Infatti, secondo una teoria da tutti accettata, la stella nasce dal collasso di una nuvola di gas ed eventualmente polvere, e si sa che la compressione adiabatica (senza perdita di calore), qui fornita dalla forza gravitazionale, produce calore al suo centro, proprio come in un motore Diesel (nella sua versione più semplice) la compressione adiabatica della miscela aria-combustibile è sufficiente a creare una temperatura che innesca lo scoppio. Nel caso della stella, se questo calore raggiunge la temperatura di accensione di qualche opportuna reazione di fusione nucleare, la stella può incominciare la sua vita. Poi magari la sua vita di stella finisce, ma...una volta stella sempre stella!

**Posso ora dare la mia risposta breve: solo masse di polvere e gas superiori a circa  $0.012 M_{\odot}$  possono accendere la fornace a fusione. Non dovrebbero esistere stelle di massa inferiore.**

Tenterò ora di spiegare come si arrivi a comprendere qualitativamente il perché di una massa minima (non però del numero  $0.012$ , che richiede qualche calcolo in più).

Anzitutto seguiremo un'idea geniale dovuta, credo, a *Dina Prialnik*, il cui capitolo 7 del libro *"An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution"* (2000) viene spesso citato quasi parola per parola. L'idea è che studiare l'intera stella è un lavoro enorme, ma studiare qualitativamente, a scopo introduttivo, **temperatura, densità e pressione nel centro della stella**, da cui bene o male tutto dipende, è un compito a portata di mano anche di chi non ha fatto studi specifici di astrofisica stellare.

Come è noto, un sistema termodinamico è determinato da due variabili (a cui, nel caso di una stella, si aggiungono le abbondanze degli elementi presenti, circa 74% di idrogeno, 24% di He e il resto condiviso dagli altri elementi). Come vedremo, al nostro modesto livello, questo non ci interessa più di tanto. Le due variabili possono essere a scelta temperatura e densità (T,  $\rho$ ), temperatura e pressione (T, P), pressione e densità (P,  $\rho$ ), perché le tre variabili (T, P,  $\rho$ ) sono legate da un'equazione, l'"equazione di stato", per cui, da due variabili si deduce la terza. In qualche caso ne bastano due.

Scegliamo T e  $\rho$ , nel centro della stella. Visto che queste due variabili varieranno per diversi ordini di grandezza, usiamo i logaritmi. *E si noti che la scala è compressa di un fattore 3 nel senso delle ordinate.*

Nelle diverse regioni del diagramma in Fig.4, per densità da 1 a  $10^{10}$  g cm<sup>-3</sup> e Temperature da  $10^6$  a  $10^{10}$  K, si possono distinguere quattro regioni, per ciascuna delle quali vale una diversa equazione di stato. Naturalmente il passaggio da una regione all'altra è abbastanza graduale, ma per semplicità tratteremo dei confini netti. Mi limiterò a sfumare un poco i confini delle varie zone.

Ecco dunque in Fig. 4 il diagramma delle quattro regioni in cui la materia è retta da diverse equazioni di stato:

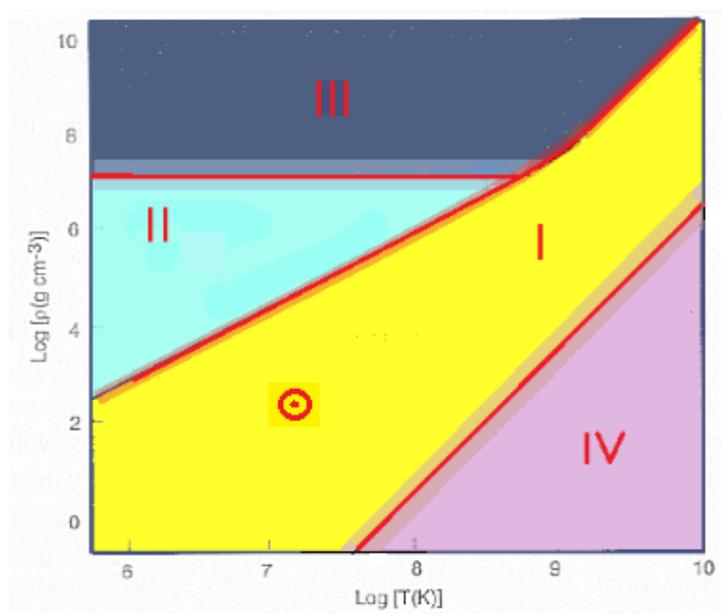


Fig.4

Valgono – approssimativamente - le seguenti equazioni di stato:

- I. Gas ideali:  $P = A \rho T$  (da  $PV = nRT$ )
- II. Elettroni degeneri:  $P = B \rho^{5/3}$
- III. Degenerazione relativistica :  $P = C \rho^{4/3}$
- IV. Zona dominata dalla pressione di radiazione:  $P = D T^4$ , in cui  $D = (1/3) a$ , dove  $a$  è la costante di radiazione  $a = 4\sigma/c$  e  $\sigma$  è la Costante di Stephan Boltzmann.

Nota che la prima equazione di stato (legge dei gas perfetti) dovrebbe essere nota dalle medie superiori, la IV al più tardi dal corso di Fisica II, mentre la II e la III possono essere ricavate facilmente (riporto in nota (5) il semplice calcolo necessario, tratto da Wikipedia, "Elettrone degenerato"). Ognuna delle costanti A, B, C, D e di quelle che verranno dopo, è nota oppure è facilmente calcolabile da costanti universali.

Per determinare i confini delle quattro zone, si fa l'ipotesi che nella zona di confine **le pressioni ricavate dalle due equazioni di stato valide nelle due zone siano eguali.**

Si trova così **immediatamente**, passando ai logaritmi

$$\text{Confine I-II: } \log \rho = 1.5 \log T + E$$

$$\text{Confine I-III: } \log \rho = 3 \log T + F$$

Confine II-III:  $\rho \gg$  costante indipendente dalla temperatura (si noti la linea orizzontale)

$$\text{Confine I-IV: } \log \rho = 3 \log T + H$$

Il passaggio da una zona all'altra è ovviamente graduale. Importa notare che nelle zone II e III la pressione è praticamente indipendente dalla temperatura, almeno fino a che  $kT$  è solo una frazione dell'energia cinetica di una particella che abbia il momento massimo.

La domanda successiva è come si collocano stelle di diversa massa nel diagramma, se esse cioè possano assumere qualsiasi temperatura e densità. Si tratta in effetti della domanda cruciale. Se temperatura e densità sono solo costrette a rispettare un'equazione di stato, l'unico altro parametro a nostra disposizione è la massa  $M$  della stella.

*Ma ottenere una esatta dipendenza di pressione, densità, temperatura e flusso di radiazione, per esempio in funzione del raggio della stella, è uno dei compiti più complessi dell'astrofisica stellare, anzi, il compito dell'astrofisica stellare, che richiede la soluzione del sistema di quattro "equazioni della struttura stellare". Si tratta di equazioni differenziali che, anche semplificate al massimo, sono oggi risolte numericamente con metodi sofisticati.*

Ma se le equazioni danno normalmente una soluzione unica per ogni modello, noi, quanto meno, abbiamo un'idea abbastanza precisa di dove è il Sole sul nostro diagramma. Vedremo di capitalizzare su questo concetto.

A questo punto "risolviamo" le equazioni della struttura stellare, per mezzo del modello più semplice possibile, ricordando anzitutto che la stella sulla sequenza principale ci sta in genere a lungo, per cui si può assumere che sia in equilibrio idrostatico. **Inoltre sceglieremo  $\rho$  costante.** Questa è un'assunzione assai grossolana, che quanto meno ci darebbe una densità centrale del Sole non realistica, eguale alla densità media del Sole,  $1.4 \text{ g/cm}^3$ , di poco superiore a quella dell'acqua, mentre il valore oggi accettato è che la densità centrale sia di circa  $150 \text{ g/cm}^3$ . Sono valori vicini o lontani tra loro? È questione di gusti. Tuttavia, quello che più ci importa, avremo altri valori abbastanza corretti, e, soprattutto, **una dipendenza funzionale  $f(\rho, T, M)$  corretta.**

L'equazione dell'equilibrio idrostatico può essere derivata immediatamente considerando il volumetto di area  $A$  e spessore  $dr$ .

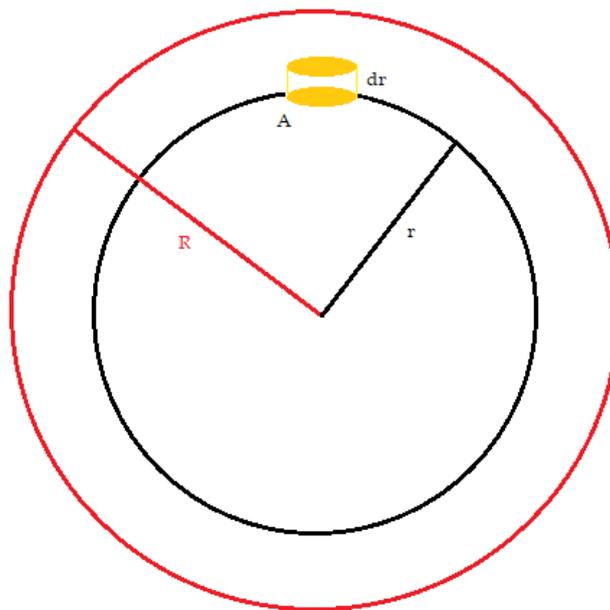


Fig.5

La forza gravitazionale attira il volumetto, di massa  $\rho A dr$ , verso il centro della stella con forza data da:

$$F_g = -G \frac{m(r) (\rho A dr)}{r^2}$$

Ove  $m(r)$  è la massa contenuta nella sfera di raggio  $r$ , come richiede il teorema di Gauss. A questa forza si oppone la forza risultante dalla differenza di pressione fra la superficie superiore e la superficie inferiore del volumetto.

Chiameremo questa differenza di pressione (che è negativa)  $dP$ , e la forza esercitata dalla pressione del fluido

$$F_p = -A dP$$

La risultante delle due forze deve essere nulla, se vogliamo che l'elemento di massa resti in equilibrio, cioè

$F_p + F_g = 0$ , da cui:  $A dP = -G \frac{m(r)(\rho A dr)}{r^2}$  e finalmente, eliminando da ambo i membri la superficie A:

$$(1) \quad \frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho}{r^2}$$

Man mano che si procede verso l'esterno, cioè aumentando  $r$ , la pressione diminuisce. Sostituiamo ora la massa contenuta nella sfera di raggio  $r$ :

$$m(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

Vogliamo ottenere la pressione centrale, che non è costante. Sostituiamo nella (1) e integriamo da  $R$  a  $0$ , con  $P(R) = 0$ , pressione nulla alla superficie.

$$P_c = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 R^2$$

Eliminiamo ora il raggio della stella, in base alla massa  $M$  della medesima.

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$$

Per cui:

$$P_c = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{2/3} = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} G \rho^{4/3} M^{2/3} = \mathbf{0.805} G \rho^{4/3} M^{2/3}$$

Questo risultato per la pressione centrale, che noi chiamiamo  $P$ , va paragonato con la soluzione che ci propone D. Prialnik, come risultato di calcoli più complicati:

$$P_c = (4\pi)^{1/3} B_n G \rho^{4/3} M^{2/3}$$

In cui  $B_n$  è un parametro numerico che dipende dall'indice  $n$  che caratterizza il modello utilizzato. Il coefficiente  $B_n$  varia fra 0.157 e 0.206, per cui il coefficiente numerico che per noi è 0.805 varia fra **0.365 e 0.478**. Insomma, con un modello di sconcertante banalità, e almeno un'ipotesi certamente erronea sulla densità, siamo vicini a un risultato classico, peraltro approssimato e oggi solo di interesse storico, come affermano coloro che fanno calcoli assai più complicati per risolvere le equazioni della struttura stellare. A noi, ad ogni

modo, ciò che interessa è la dipendenza funzionale della pressione centrale dalla densità centrale e dalla massa totale.

Più importante è la dipendenza funzionale dei parametri  $\rho, T, M$ . Se ci poniamo nella zona I (gas ideale), abbiamo che  $P = A \rho T$  (ricordiamo che P per noi era la pressione centrale).

Quindi,  $A \rho T = K \rho^{4/3} M^{2/3}$ , cioè  $\rho = \left(\frac{K}{A}\right) \frac{\rho^{4/3} M^{2/3}}{T}$ , da cui  $\rho^{-1/3} = \left(\frac{K}{A}\right) \frac{M^{2/3}}{T}$  e infine

$$\rho = \left(\frac{A}{K}\right)^3 \frac{T^3}{M^2}$$

Da cui si vede la dipendenza da  $1/M^2$ . Questo ci dice che le varie traiettorie delle stelle risiedono nella parte alta della zona I se la loro massa è piccola e nella parte bassa della zona I, o addirittura nella zona IV, se la massa è grande.

Basiamoci ora sulla dipendenza funzionale trovata, che è corretta, e utilizziamo quel che sappiamo del Sole. Supponiamo cioè di considerare una stella che abbia la temperatura centrale del sole, circa  $1.6 \cdot 10^7$  K e procedere sulla retta di densità costante (**qualunque essa sia**) fino ad incontrare la zona di radiazione, cioè la zona dove scatta il limite di Eddington. Guardando il diagramma, noi raggiungiamo il confine alla temperatura di circa  $4 \cdot 10^8$  K. Il rapporto delle temperature vale 25. Ma noi, per densità costante, abbiamo una sorta di terza legge di Keplero: "i cubi delle temperature centrali sono proporzionali ai quadrati delle masse", cioè, nel nostro caso, il rapporto tra massa massima e massa solare dovrebbe valere  $(25)^{(3/2)} = 125$ , che è ancora inferiore alle masse massime osservate, ma assai vicino ai valori calcolati da altri "per altra via e per altri porti".

In altre parole, questa stima grossolana ci porta a una massa massima di 125 Masse solari. Inoltre, finché le traiettorie delle stelle nella zona I dei gas perfetti sono rette su scala logaritmica, esse restano parallele al confine fra la regione I e la regione IV, e quindi la massa massima, calcolata a partire da qualsiasi altra stella, non cambia (6).

Quasi senza volerlo abbiamo calcolato una massa massima. Il problema è ora quello di calcolare la massa minima.

Inoltre abbiamo notato che le stelle di eguale massa M presentano la seguente dipendenza della densità centrale dalla temperatura centrale:

$$\rho \propto T^3 \quad \text{o anche} \quad \text{Log } \rho = 3 \text{ Log } T + \text{costante}$$

cioè le stelle di egual massa giacciono (su carta logaritmica) su una *retta parallela al confine tra le zone I e IV*. Una stella arriva dal basso a sinistra nella zona I e contraendosi e

aumentando la propria densità sale lungo tale retta fino a che non si accendono le reazioni di fusione. Qui si arresterà tanto a lungo quanto le sue riserve di combustibile nucleare le permetteranno, e poi, visto che la reazione comporta solo l'annichilazione di 0.1% della massa, procederà su quella retta.

Nella figura seguente si vedono dunque le tracce delle stelle. Siccome la pendenza del confine tra le zone I e II è 1.5 e non 3, le rette evolutive delle stelle incontreranno la zone di degenerazione. In figura sono disegnate le linee rette dei casi ideali. **In realtà, le stelle faranno una curva e non un angolo**, fuori dalla zona centrale (I) per entrare nella zona di degenerazione II (non relativistica) o III (relativistica). Non solo, ma in quel tratto in cui passeranno dalla tranquilla zona I all'ancor più tranquilla zona II o III, succederanno cose da pazzi, esplosioni, flashes etc., di breve durata, che a questo punto non ci riguardano. Una volta entrate nelle zone II o III, le stelle non produrranno più energia di fusione al loro interno, ma vivranno sull'energia residua, irradiandola. *Cioè si raffredderanno, a densità costante procedendo quindi sul loro cammino evolutivo verso sinistra.*

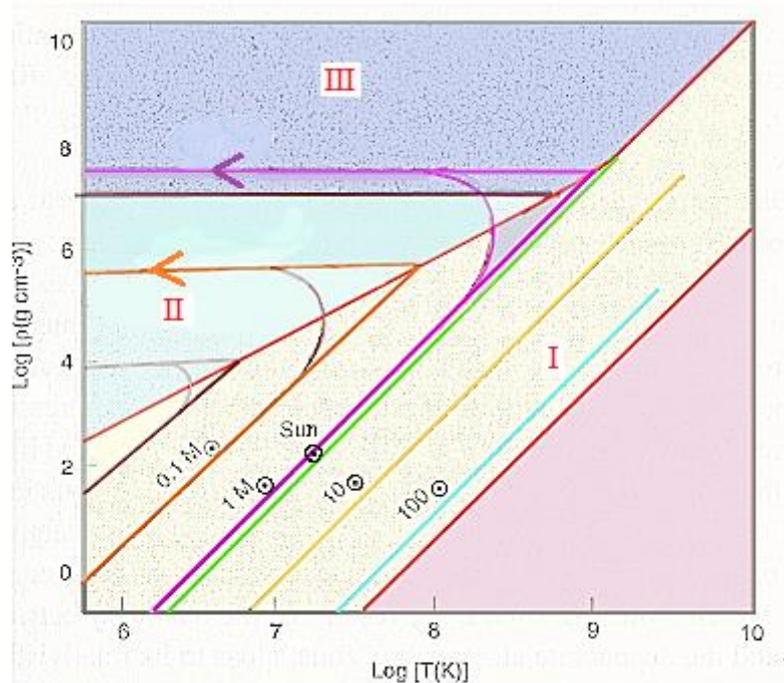


Fig.6

(In verde è segnata la massa limite di Chandrasekhar)

Resta solo da comprendere quali sono i meccanismi che determinano una massa minima. Per questo bisogna studiare meglio le reazioni nucleari di fusione che della nostra massa di gas in collasso fanno una stella.

Le reazioni di fusione che portano dall'idrogeno al Ferro, elemento che non è suscettibile né di fusione né di fissione (ma è suscettibile alla fotodisintegrazione in elio), sono essenzialmente cinque. La loro importanza è valutata dal peso che assumono nell'energia irradiata, cioè nella luminosità della stella.

(i) Fusione dell'idrogeno nell'elio, che avviene con due processi, la catena p-p, oppure il ciclo CNO. La catena p-p si accende al di sopra di qualche milione di gradi

(ii) Fusione dell'Elcio in Carbonio, attraverso la reazione  $3\alpha$

(iii) La combustione del carbonio

(iv) la combustione dell'ossigeno

(v) la combustione del silicio.

In ognuno dei casi la reazione di fusione si accende rapidamente: a sinistra nel nostro diagramma la fusione è quasi inesistente; a destra è significativa. Possiamo schematizzare le soglie con curve nel piano  $\log \rho - \log T$ , che sono state calcolate con cura.

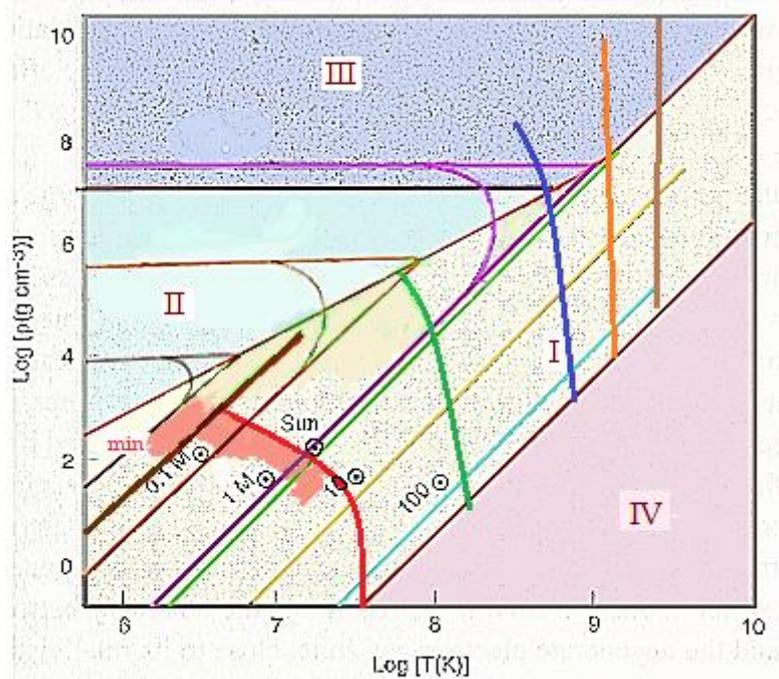


Fig.7

Le cinque curve che attraversano la zona I sono, incominciando da sinistra,

- (in rosso) la soglia di fusione dell'idrogeno, che in comincia intorno a 1.6 milioni di gradi, e quindi non raggiunge il confine (I-II); nel primo tratto rappresenta la reazione p-p, nel tratto quasi verticale, invece, rappresenta il ciclo CNO.
- (in verde) il ciclo  $3\alpha$  (triplo alfa), che attraversa l'intera zona I.

- (in blu) la combustione del Carbonio. Come si vede dalla figura, a questo punto il sole non arriva. Brucerà solo Idrogeno e Elio.
- (in arancione) la combustione dell'Ossigeno;
- (in bruno) la combustione del silicio.

Ma ciò che ci importa, nel contesto delle stelle di massa minima, è la regione nel quadrante SW. La linea trasversale rossa è la massa minima che compare nel libro di Prialnik e seguaci, che sembra essere intorno a 0.06 MS. La linea segnata "min" in rosso è 0.012 MS, l'attuale limite minimo riconosciuto. La macchia rossa significa che la combustione p-p si estende anche a temperature più basse della nota soglia di qualche milione di gradi.

Questa affermazione richiede un commento. Il secondo stadio del ciclo p-p (inquadrato nella figura 8) è la fusione del deuterio, nucleo costituito da un protone e un neutrone, in trizio.

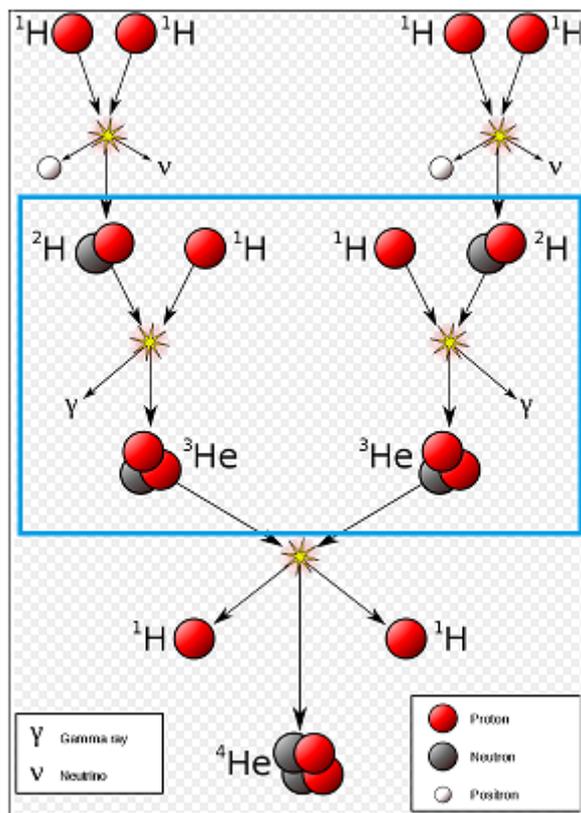


Fig.8

La fusione del deuterio si accende a temperature di poco superiori al milione di gradi, ma **nel ciclo p-p** non può aver luogo se prima non si è accesa la fusione p-p con produzione di grandi quantità di deuterio. Tuttavia nella materia primordiale è già presente una frazione di deuterio, circa  $10^{-5}$  dell'idrogeno (in massa) che può accendersi, anche se a basso regime, senza che abbia avuto luogo il primo stadio del ciclo di fusione p-p. Ciò avviene, secondo calcoli precisi, quando la massa di polvere e gas che si sta contraendo è circa 12 MG, 0.0125 MS. Stelle di massa più piccola si contraggono e si scaldano, ma non

abbastanza da iniziare una fusione nucleare, escono dalla Zona I, ed entrano nella zona II, della materia degenera, iniziando una vita da pianeti giganti. Tuttavia la fase di fusione del deuterio permette alle masse di gas  $> 13$  MG una vita di stelle per un breve periodo, da un milione a cento milioni di anni. Si tratta di "nane brune", la cui fisica è abbastanza complessa e poco stabilizzata da permettermi di non trattarla qui. **Dunque esistono stelle di piccola massa che possono raggiungere una combustione di questo tipo, prima della soglia, e senza che abbiano potuto partecipare alla combustione p-p.**

Sembra una cosa da poco, ma la fusione "spontanea" del deuterio, la macchia color rosso chiaro che precede la curva rossa del ciclo p-p, è importante. Se essa non avesse luogo, non potrebbero neppure esistere stelle di massa superiore a 2-3 MS. L'accensione immediata del ciclo p-p, assai più energetica di quella del secondo stadio da solo, arresterebbe l'accrescimento della stella che si sta collassando. L'accensione del deuterio, invece, arresta la temperatura centrale a circa un milione di gradi e permette che ulteriore massa cada sulla stella, risultando in una maggiore massa finale quando la stella raggiunge la sequenza principale.

#### NOTE:

(1) Overgard, T. & Ostgaard, E., An.Ap, 243, 412-418 (1991) danno una tavola di vari possibili parametri di **stelle di quark**. A quel tempo non era nota la massa dei Quark. Oggi se ne ha una nozione più precisa, anche se la nozione stessa di massa di un quark è diventata meno precisa. Per masse di quark inferiori a  $0.4 \text{ GeV}/c^2$ , i raggi stellari sembrano essere dello stesso ordine di quelli delle stelle a neutroni.

(2) **Luminosità limite (Eddington)**, espressa in Luminosità solare LS, per una stella di massa M.

$$\frac{L(Edd)}{LS} = 32000 \frac{M}{MS}$$

Questa equazione *non definisce un limite alla massa*, ma, data una stella di una certa massa, definisce la luminosità massima che la stella può avere. Il meccanismo che determina la massima luminosità è dato dal fatto che la pressione di radiazione espellerebbe gli strati esterni della stella, se fosse maggiore della pressione esercitata dalla forza gravitazionale. Il modello di stella utilizzato da Eddington era molto semplificato, ma il numero 32000 risulta da un calcolo preciso utilizzando costanti fondamentali, più la massa del sole.

(3) Per me, le stelle sono i corpi celesti rappresentati nel celebre **diagramma di Hertzsprung-Russell** (o HR, l'ABC dell'astronomo), che ho qui adattato da una illustrazione originale della Columbia University, "*The Frontiers of Science*", con un paio di aggiunte.

L'ideale, almeno per me, sarebbe un diagramma di HR con la luminosità (in tutte le lunghezze d'onda) di una stella in ordinate e la temperatura superficiale in ascisse. Le differenti variabili che si trovano in ascisse (Classi spettrali, indice di colore etc.) rappresentano i diversi tentativi degli astronomi di sostituire la temperatura superficiale con altre variabili più o meno direttamente rappresentative della medesima, tenendo anche conto del fatto che la temperatura superficiale può essere diversa da quella risultante dalla legge di Wien o da altre variabili.

**Legge di Wien** (1893): la temperatura superficiale della stella (quella centrale si valuta in milioni di gradi, per sostenere la fusione nucleare) può essere dedotta approssimando lo spettro della radiazione stellare con quello di un corpo nero – ciò che non è sempre facile - e cercandone il massimo. Sotto certe favorevoli condizioni, vale la legge:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \text{ in cui } b \cong 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m Kelvin}$$

Il metodo fallirebbe malamente se il massimo di radiazione cadesse in regioni dello spettro elettromagnetico invisibili all'astronomo.

Più complesso si dimostrò il problema delle **magnitudini assolute (o delle luminosità delle stelle)**, da porre in ordinate, per fissare le quali occorre conoscere la distanza delle stelle. Non potendolo fare (oggi, con i dati dei satelliti astrometrici europei, prima Hipparcos e poi GAIA, sarebbe uno scherzo), si sceglievano stelle appartenenti ad ammassi stellari che si potevano supporre tutti alla stessa distanza. Poi, con un paziente lavoro di taratura e collazione dei dati si riuscì a fare un diagramma più ricco.

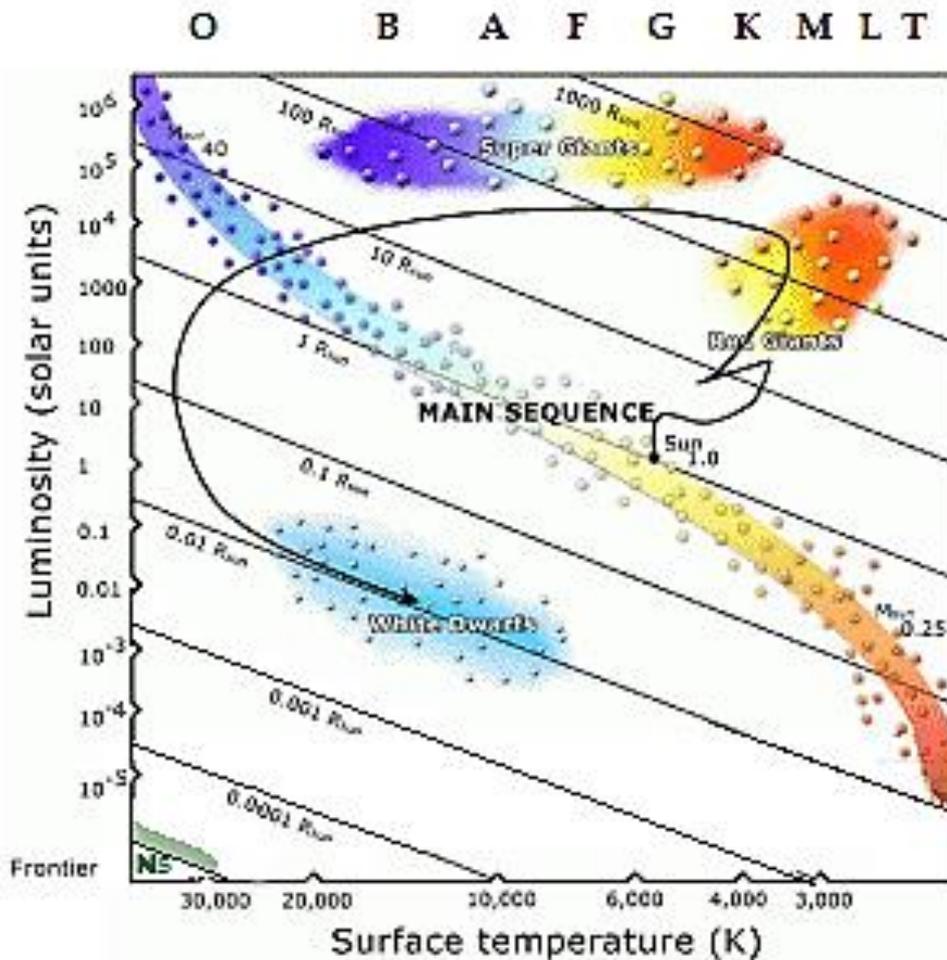


Fig.8: Diagramma di Hertzsprung-Russell.

Ora la sorpresa di coloro che piano piano costruirono il diagramma di HR, fu che il piano Luminosità - Temperatura superficiale non era uniformemente popolato da stelle, ma vi si presentavano varie "isole" di stelle di simili caratteristiche, e, soprattutto, una popolata zona allungata che attraversava il diagramma da NW a SE, la "sequenza principale". Una seconda sorpresa fu forse osservare che in determinati ammassi stellari la sequenza principale non raggiungeva l'angolo NW: le stelle sembravano averla abbandonata assai prima, piegando dapprima verso destra a poi verso l'alto.

Nel diagramma vediamo in diagonale la Sequenza principale (*Main sequence*), le Supergiganti (*Super Giants*, in alto al centro, blu /gialle/rosse), le giganti rosse (*Red Giants*, in alto a destra) e le nane bianche (*White Dwarf*), un'isola un po' più in basso e a sinistra del centro.

La luminosità è in termini di luminosità solari e il raggio della stella è indicato dalle rette diagonali. Il sole (Sun) ovviamente giace sulla retta  $R=1$  (misurata in raggi solari, RS) e a temperatura superficiale di circa  $6000^{\circ}\text{K}$ . Tutto il mio contributo si riduce all'aggiunta di una breve coda di nane brune in basso a destra e una macchia verdolina a sinistra in basso, il posto *indicativo* delle NS, stelle di neutroni, con raggio di una decina di km. Una volta

non avrebbero avuto posto in questo diagramma *empirico*, poiché erano creature squisitamente teoriche. La scoperta delle pulsar (28 novembre 1967) e la loro identificazione con stelle di neutroni le ha rese visibili, ma non in una zona di temperatura superficiale compresa nel diagramma. Si pensa che le stelle di neutroni giovani emettano radiazione ad altissima frequenza (Raggi X), che poi a poco a poco si spegne. La prima pulsar ottica che fu scoperta, quella della nebulosa del Granchio, PSR-B0531+21, ha il raggio "classico" delle stelle di neutroni (10 km) e una "temperatura superficiale" di  $1.6 \cdot 10^6$  K (non di corpo nero!). Questo la porrebbe alquanto a sinistra, a mezza altezza del diagramma convenzionale. Una volta spenta la radiazione X, resterebbe la radiazione radio, quella grazie alle quali le pulsar sono state scoperte, che invece le porrebbe a destra in basso nel diagramma.

Non ho introdotto i buchi neri, perché in nessuna lingua moderna che io conosca hanno nome di stelle, diversamente dalle stelle di neutroni.

(4) Può essere istruttivo e dare una certa soddisfazione calcolare la durata della vita del sole sulla sequenza principale data la sua massa, la sua luminosità, e il fatto che solo 0.6% della massa della stella viene consumata in questa fase. (R:  $8.9 \cdot 10^9$  anni)

(5) Calcolo della relazione pressione-densità di un gas di Fermi non relativistico.  
(da: [https://it.wikipedia.org/wiki/Elettrone\\_degenerato](https://it.wikipedia.org/wiki/Elettrone_degenerato))

Consideriamo un sistema quantistico di molte particelle, e guardiamone lo spazio delle fasi. A causa del principio di esclusione lo spazio delle fasi può essere diviso in tante celle discrete, ognuna di volume

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \geq h^3$$

e che può contenere al più  $s$  particelle, essendo  $s$  il numero di stati di spin ( $s=2$  per elettroni, protoni, neutroni).

Per una distribuzione sferica di particelle compresa entro un raggio massimo  $R$  ed un momento massimo  $p_F$  il numero di particelle sarà:

$$N = s \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{4\pi}{3} p_F^3 \frac{1}{h^3}$$

e quindi, la densità di particelle per unità di volume spaziale sarà:

$$n = \frac{N}{\frac{4\pi}{3} R^3} = s \frac{4\pi}{3} \left( \frac{p_F}{h} \right)^3$$

dalla quale ricaviamo l'espressione del momento massimo  $p_F$ , detto momento di Fermi

$$p_F = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{n}{s} \right)^{\frac{1}{3}} h$$

e dal quale si ricava l'energia di Fermi

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{3}{4\pi} \frac{n}{s} \right)^{\frac{2}{3}} h^2$$

e l'energia media di un elettrone sarà

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} 4\pi p^2 dp}{\int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp} = \frac{1}{2m} \frac{3p_F^5}{5p_F^3} = \frac{3}{5} E_F$$

Quindi se tutti gli elettroni hanno energia minore di  $E_F$  il gas si dice *degenere* e gli si può associare una pressione definita in modo termodinamico (se consideriamo  $\gamma$  il coefficiente adiabatico e  $\varepsilon$  la densità di energia):

$$p_d = (\gamma - 1)\varepsilon = \frac{2}{3} n \bar{E} = \frac{1}{5m} \left( \frac{3}{4\pi s} \right)^{\frac{2}{3}} h^2 n^{\frac{5}{3}}$$

detta **Pressione di degenerazione**.

Come si vede, la trattazione è la stessa se le particelle sono neutroni o elettroni. La formula finale si applica a entrambe ad entrambi i tipi di particelle semplicemente inserendo la massa corretta. Se però ci troviamo in un caso estremo relativistico, in cui la materia è equiparata a fotoni, l'energia di Fermi è data da  $E(F) = p(F) c$ , e, fatte le dovute sostituzioni nelle formule successive, si trova che la pressione è proporzionale a  $n^{4/3}$ .

(6) Potrei far a meno di notare che le figure del testo D. Prialnik, riprese da altri, e utilizzate da me per la stima della massa massima di una stella mi sembra contengano un problema, che può essere dovuto a un mio errore di calcolo (troppe costanti fondamentali!). La linea di separazione tra la zona I e la zona IV è parallela alla linea su cui si deve trovare una stella di data massa, quindi essa stessa coincide con la traccia evolutiva di una stella ideale di massa massima rispetto alla pressione di radiazione. Ma se si fa il calcolo partendo dalle costanti fondamentali, si trova che essa corrisponde a una massa di appena 50 MS. In altre parole, nei diagrammi la linea sembra esser stata posta troppo a destra. Una stella di 100 MS sarebbe già in zona IV. Non sarebbe grave, perché le linee tracciate nel

diagramma rappresentano uno schema grossolano, e la zona di confine è assai confusa. Prego comunque il lettore volenteroso di verificare. In sostanza, si tratta di risolvere per M l'equazione:

$$\frac{K_0^3}{4\pi B_n^3 G^3 M^2} = \frac{4\sigma}{3c}$$

In cui:  $K_0 = R/\mu$ , in cui R è la costante dei gas ideali in  $PV=RT$  e  $\mu$ , peso molecolare medio è circa 0.6;  $B_n$  è una costante del modello, e varia da 0.157 a 0.206; G è la costante gravitazionale; c è la velocità della luce e  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann. A me risulta che  $M =$  circa 50 MS e  $M= 100MS$  è nella zona IV. Si possono variare un poco solo  $\mu$  e  $B_n$ .

Mi piacerebbe sapere dove mi sono sbagliato e/o se variando - ma non troppo -  $B_n$  e  $\mu$  si possono trovare valori dell'ordine di 120 MS.

Certo, a parte questo dettaglio, è stupefacente che da costanti fondamentali si possa giungere al valore di una massa, che può essere interpretata come la massa della stella più massiccia possibile.

Auguri.