LO SCORRERE DEL TEMPO SUL SOLE E SULLA TERRA

Secondo la Relatività Generale

Questo breve saggio fu scritto in gran parte in risposta alla domanda (Quora):

In riferimento alla relatività generale, di quanto differirebbe un orologio atomico in prossimità del sole rispetto a quelli posizionati sulla terra?

Risposta Breve:

Come è noto, un orologio collocato sulla superficie del sole ritarderebbe rispetto a uno collocato sulla Terra. Il ritardo si accumulerebbe nel tempo e non dipenderebbe da come è costruito l'orologio.

Supponiamo che, a distanza tale che i campi gravitazionali dei corpi celesti che ci interessano siano praticamente trascurabili, siano posizionati orologi che misurano un intervallo di tempo t in secondi.
Abbiamo dunque due numeri significativi per il nostro problema:

1) il rapporto tra gli intervalli di tempo tra due eventi misurati "all'infinito" e quelli misurati sulla Terra.
Sulla superficie terrestre, con raggio medio 6.371 106 m, grazie alla dilatazione temporale gravitazionale, avremmo trascorso un tempo τT più breve, dato da:
$\tau T = 0.9999999999303877\ t$
In 1 anno **(3.153000 107 s)** sulla Terra misureremmo un tempo 0.0219 s più breve.

2) il medesimo rapporto, tra intervalli di tempo misurati "all'infinito" e sul Sole.
Sulla superficie solare, il fattore di conversione sarebbe
$\tau S = 0.99999787\ t$
cioè un anno passato sulla superficie solare sarebbe 66.94 s più breve.
Da questi due numeri si ottiene il ritardo totale accumulato dal Sole rispetto alla Terra.
Data la piccolezza delle correzioni risultanti dal problema in esame, si può dimostrare facilmente che
$(t- \tau T)/(t-\tau S)$= (massa terra * raggio sole)/(massa sole * raggio terra) =0.00032845
Cioè il ritardo accumulato sulla Terra (si vedano i risultati dati sopra) è 3 decimillesimi di quello del sole, che già è assai piccolo.

Fine della risposta breve.

La parte interessante, naturalmente, è come si dimostrano questi ritardi.

Abbiamo diverse possibilità. Tralascio quelle troppo qualitative, che possono dare un'idea di perché un orologio ritardi se è situato in un campo gravitazionale, ma sovente si dimostrano errate al primo esame un poco approfondito.

Io darò due procedimenti egualmente corretti, l'uno breve, ispirato al testo di W.Pauli ("Teoria della relatività", 1921) e l'altro più lungo, ispirato al testo di L. Landau ("Classical Theory of Fields" 3 ed, 1971). Il secondo illustra qualche concetto in più della relatività generale, anche se a livello quasi elementare.

I. (Pauli)

(W.Pauli, Teoria della relatività, capo VII, in particolare § 53.)

Il Postulato o principio della relatività ristretta è che esiste un insieme "triplamente infinito" di sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme, nel quale i fenomeni si sviluppano secondo leggi perfettamente identiche. Il sistema è detto "triplamente infinito" in quanto le tre componenti della velocità di traslazione possono assumere qualsiasi valore, beninteso inferiore a c. Einstein, una volta introdotta e approfondita la teoria della relatività ristretta, che riguarda le relazioni tra sistemi inerziali (in moto rettilineo uniforme) si pose il problema di generalizzare il principio di relatività a sistemi di riferimento in moto secondo leggi più complesse della traslazione uniforme: le leggi della natura dovrebbero mantenere invariata la loro forma anche in sistemi di riferimento "non galileiani" (nome che Einstein applicò ai sistemi inerziali).

La possibilità di realizzare questo programma è offerta dal "principio di equivalenza". Nella teoria Newtoniana, un sistema situato in un **campo gravitazionale uniforme** è perfettamente equivalente, da un punto di vista **meccanico**, a un sistema di riferimento uniformemente accelerato. *Il principio di equivalenza di Einstein richiede che anche tutti gli altri processi fisici debbano svolgersi secondo le stesse leggi*. Poiché possiamo calcolare lo svolgimento di un processo in un sistema uniformemente accelerato, possiamo anche valutare l'influenza di un campo gravitazionale uniforme su un processo qualunque.

Su questa base, Einstein poté predire la "dilatazione del tempo" e lo "spostamento verso il rosso" dovuti a un campo gravitazionale, nonché la curvatura dei raggi luminosi provenienti da stelle e deviati dal campo gravitazionale solare.

Dopo varie peripezie intellettuali, brevemente delineate dal Pauli, venne enunciato il principio di equivalenza valido in generale e non solo per campi gravitazionali uniformi: "*Per ogni regione spazio temporale infinitamente piccola (cioè così piccola che in essa la variazione spaziale e temporale della gravità possa essere trascurata) esiste sempre un sistema di coordinate (X1, X2, X3, X4), dal quale è assente ogni effetto della gravità sia sul movimento dei punti materiali, che su qualunque altro fenomeno fisico*. "

Detto in altre parole, è sempre possibile eliminare qualunque campo gravitazionale in regioni di universo infinitamente piccole. Il sistema di coordinate può essere realizzato mediante una scatola sufficientemente piccola, non soggetta ad altre forze oltre a quella di gravità e che, seguendo questa, sia in caduta libera.

Questo è possibile perché il campo gravitazionale ha la proprietà fondamentale di imprimere a tutti i corpi la stessa accelerazione. Ciò avviene perché la massa inerziale è sempre eguale alla massa gravitazionale, come è confermato dall'esperienza.

La gravitazione, nella teoria di Einstein, è una forza apparente (o pseudoforza), come lo sono la forza di Coriolis e la forza centrifuga nella teoria di Newton. Ma un'opportuna trasformazione di sistemi di riferimento può eliminare la forza centrifuga e la forza di Coriolis da una regione finita e non più infinitesima, ciò che è impossibile per la gravitazione. Tuttavia, a noi basta che l'eliminazione di quest'ultima sia possibile in una regione sufficientemente (infinitesimamente) piccola.

Si consideri ora un sistema di riferimento K rotante con velocità angolare ω rispetto al sistema inerziale K_0. Per un **orologio** immobile in K, andando a velocità ωr, e quindi subendo una dilatazione temporale

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\omega r)^2}{c^2}}$$

il tempo trascorrerà tanto più lentamente quanto più lontano l'orologio si troverà dall'asse di rotazione:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{(\omega r)^2}{c^2}}}$$

dove t è il tempo nel sistema inerziale K_0, e τ è il tempo nel sistema rotante K.

Questa idea dell'andare più lentamente la si può comprendere senza confondersi pensando a un passeggero in volo "iperbolico", cioè con accelerazione costante. Il suo tempo proprio (τ) misura magari due anni, mentre il tempo di un osservatore sulla terra misura t = 4 anni, e il rapporto tra i tempi misurati nei due sistemi aumenta procedendo nel viaggio.

Tanto per essere concreti, quando nel sistema rotante passa un secondo, in un sistema inerziale non coinvolto dal campo rotazionale passano γ (>1) secondi. O anche, quando in un sistema inerziale non coinvolto nel campo rotazionale passa 1 secondo, un orologio solidale con il sistema rotante misurerà γ^{-1} (< 1) secondi.

Ma noi, seguendo Pauli, possiamo interpretare la pseudo-forza agente sull'orologio in K, della forma mω^2 r, come una forza gravitazionale derivante dal potenziale

$$\phi = -\frac{(\omega r)^2}{2}$$

Per cui:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}}} = \tau\left(1-\frac{\phi}{c^2}\right)$$

(La seconda formula, naturalmente, è data dai primi due termini dello sviluppo in serie, per $\phi \ll c^2$)

In effetti, come ben mostrato dal film "2001 Odissea nello spazio", una rotazione della stazione spaziale che ivi compare in forma di anello, simula una forza di gravità eguale a quella terrestre, vantaggio che l'attuale ISS non presenta, costringendo gli astronauti a vivere in (quasi) assenza di peso, e a subire tutte le inevitabili conseguenze.

Vediamo quindi che le nostre formule non distinguono tra loro la natura delle pseudo-forze, la cui unica prerogativa da un punto di vista formale è che sono proporzionali alla massa del corpo su cui agiscono, per cui l'accelerazione impartita è indipendente dalla massa. Così l'equazione di Newton per una forza gravitazionale originata da una massa M che agisce su una particella di massa m è:

$$G\frac{Mm_g}{r^2} = m_i a$$

Quindi, *se la massa m(g) su cui agisce la forza gravitazionale è eguale alla massa inerziale m(i) che, nelle parole di Newton,* ***resiste*** *alla forza, esse possono essere cancellate*, per cui otteniamo una accelerazione universale che vale allo stesso modo per un grano di riso e per un transatlantico. Gli esperimenti più sofisticati (missione satellitare **Microscope** del CNES francese, *q.v.*) hanno potuto verificare questa eguaglianza fino a 1 parte su 10^{15}.

Per il Pauli, possiamo dunque calcolare la dilatazione temporale gravitazionale allo stesso modo, calcolando i tempi allo stesso modo, e sostituendo al potenziale

$$-\frac{(\omega r)^2}{2} \text{ il potenziale } - G\frac{M}{r}.$$

Ne segue che:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{2MG}{rc^2}}} = \tau(1 + \frac{MG}{rc^2})$$

La quantità $r_g = \frac{2MG}{c^2}$ è detta "raggio di Schwartzschild" di una massa M e vale 1.4852276 × 10^{-27}* M (kg).

Per il Sole (M = 1.988435 10^{30} kg) , da cui r_{gs} = **2953.28 m**

Per la Terra (M = 5.9721986 10^24) r_{gs} = **0.00887 m, cioè 8.87 mm.**

Come si vede, per la domanda posta su Quora , i valori r_g/r sono assai piccoli.

Supponiamo che a infinita distanza t valga 1 s.

Sulla superficie terrestre, con raggio medio 6.371 106 m, avremmo trascorso un tempo più breve, dato da:

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{2MG}{rc^2}} = 0.999999999303877 * t$$

In 1 anno (3.153000 10^7 s) sulla Terra avremmo trascorso un tempo 0.0219 s più breve.

Sulla superficie solare, con raggio 6.957 10^8 m, il fattore di conversione sarebbe

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{2MG}{rc^2}} = 0.99999787 * t$$

cioè in un anno sulla superficie solare avremmo trascorso un tempo 66.94 s più breve.

Va bene, qualcuno potrebbe dire, ma in 4.57 miliardi anni (vita del sole) magari … Magari niente, sarebbe solo una differenza di 9700.53 anni, 2 parti su un milione.

Per calcolare il rapporto tra le differenze degli intervalli di tempo, chiamati τT e τS gli intervalli misurati rispettivamente sulla Terra e sul Sole, e t l'intervallo fra gli stessi due eventi misurato all'infinito, abbiamo:

$$t - \tau T = t\left(1 - \frac{\tau T}{t}\right) = t\left(1 - 1 + \frac{G\,M(terra)}{r(terra)c^2}\right) = t\frac{G\,M(terra)}{r(terra)c^2}$$

Per cui, il rapporto fra intervalli (t- τT)/(t- τS) = M(terra)*r(sole)/(M(sole)*r(terra)) = **0.00032845**

Che sono le cifre date nella “risposta breve”.

II. (Landau)

(The Classical Theory of Fields, 1967-1971.)

In generale questo tipo di problemi viene risolto utilizzando la cosiddetta “metrica di Schwartzschild”. Nella teoria della relatività generale di Einstein, la metrica di Schwarzschild è la soluzione alle equazioni di campo di Einstein che descrive il campo gravitazionale al di fuori di una massa sferica, partendo dal presupposto che la carica elettrica e il momento angolare della massa, nonché la costante cosmologica universale siano tutti nulli. La soluzione è anche un'approssimazione utile per descrivere oggetti astronomici a rotazione lenta come molte stelle e pianeti, tra cui la Terra e il Sole. Essa prende il nome da Karl Schwarzschild, che per primo pubblicò la soluzione nel 1916, subito dopo la pubblicazione della teoria della relatività generale da parte di Einstein. Formalmente, la “metrica” esprime la distanza invariante (in quattro dimensioni) tra due punti infinitamente vicini.

Come pro-memoria, ricordo che nello spazio euclideo bidimensionale, la distanza fra due punti infinitesimamente vicini è data dal teorema di Pitagora per distanze infinitesime, che si può scrivere come

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Espressione che può essere generalizzata come

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i\, dx_j$$

Qui, abbiamo battezzato le variabili t, x,y,z abbiamo introdotto x_0, x_1, x_2, x_3; inoltre abbiamo introdotto dei coefficienti g_{ij}, 4 nel caso bidimensionale, 9 nel caso tridimensionale, 16 nel caso quadridimensionale della relatività, ristretta o generale. Questo g_{ij} è il cosiddetto tensore metrico, da cui derivano vari tensori che caratterizzano la curvatura dello spazio.

Ma non ci si spaventi: la notazione fin qui data è utile, ma non ci addentreremo molto più oltre nel campo della geometria differenziale. Invece di risolvere le equazioni di Einstein , ottenere la metrica di Schwartzschild e calcolarne il caso limite per piccole velocità e piccoli campi gravitazionali, seguendo il Landau utilizzerò un'espressione fin da principio approssimata, valida per un corpo celeste che genera un modesto campo gravitazionale e ruota lentamente, situazione che si riferisce sia al Sole che alla Terra. Naturalmente si tratta di due affermazioni meno che qualitative: per la "lenta rotazione" ci sono pochi dubbi, in quanto la massima velocità tangenziale del corpo rotante deve essere molto inferiore a c, velocità della luce, e nel caso del Sole e della Terra, neppure la velocità equatoriale si avvicina a quella della luce, o il corpo celeste sarebbe volato in pezzi. Meno chiara è la risposta alla domanda:" Quando un campo gravitazionale può essere definito debole?". La risposta risulterà dalla soluzione del problema. Otterremo che la "distanza dell'orologio" dal centro di gravità deve essere molto superiore al raggio di Schwartzschild della massa gravitazionale operante, e vedremo che questa condizione è soddisfatta per gli orologi di nostro interesse.

Il punto di partenza è il principio di azione valido per la meccanica classica non relativistica. Come è noto, le leggi di Newton apparvero fin da principio come una sorta di "tavole della Legge", come quelle consegnate a Mosè sul monte Sinai. Sono lì e non si discutono. Il loro successo nell'applicazione a svariati problemi meccanici le giustifica. Ma questo non era filosoficamente soddisfacente. Fin da principio vi furono coloro che vollero sostituirle con un principio, che, dopo svariate proposte parzialmente valide (Maupertuis, 1746; Euler, 1748 etc.) divenne il "Principio di minima azione", che "*nei fenomeni della natura, l'azione viene sempre minimizzata.*" O, meglio ancora: "Esiste una grandezza fisica detta azione (inventata da Maupertuis & Co) tale che essa viene sempre minimizzata nei fenomeni della natura. "

La risposta su come minimizzare l'azione, dopo i primi tentativi dei pionieri, venne dalle equazioni di Lagrange, applicabili a sistemi con vincoli olonomi (cioè espressi da funzioni integrabili), e forze derivanti da un potenziale scalare, in cui siano note a un dato istante posizioni e velocità dei vari punti del sistema e non occorrano derivate di ordine superiore.

Ma come si esprime l'azione? Qui sta il problema. Si noti che non ci si aspetta che un **principio** sia dimostrato. Basta che sia giustificato dal successo, né più né meno delle leggi di Newton. Quindi, l'azione può essere definita in base ai ragionamenti che si vogliono, purché, minimizzandola, ne derivino le corrette equazioni del moto del sistema.

Landau ("*Mechanics*") scelse di ignorare le leggi di Newton e di giustificare la formula dell'***azione per una particella libera non relativistica*** in base a principi fondamentali: essa non deve dipendere né dalle variabili spaziali né – se possibile - da quella temporale. Deve essere invariante per rotazioni. Tutto ciò perché si suppone che l'universo sia *omogeneo* (ogni punto è eguale agli altri) e *isotropo* (non esistono direzioni privilegiate). In tal caso, Landau dimostra che l'azione S, da rendere minima nel caso di una particella libera deve essere della forma

$$S = \int_1^2 \frac{1}{2} m v^2 dt$$

Ma sappiamo che ove una funzione è vicina a un estremo, la sua variazione spostando di poco la variabile indipendente, è nulla. Per cui il principio può essere espresso affermando che:

$$\delta \int_1^2 \frac{1}{2} m v^2 dt = 0$$

L'integrando è la funzione Lagrangiana di una particella libera. E se la particella è soggetta a forze (come si è detto) derivanti da un potenziale?

Dice testualmente il Landau ("*Mechanics*, §5) :" ***Si trova*** *che l'interazione fra le particelle può essere descritta aggiungendo alla Lagrangiana per le particelle libere una certa funzione delle coordinate che dipende dalla natura delle interazioni*".

Denotando questa funzione delle coordinate con - *U(**r**1, **r**2,…)* e dandole il nome di potenziale, si ha che

$$L = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \mathrm{U}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\ \dots)$$

Ora, che la lagrangiana di una particella libera debba rispondere a determinate condizioni di isotropia e omogeneità è ragionevole, ma che particelle libere diventino particelle interagenti in modo corretto semplicemente aggiungendo una appropriata funzione, è meno giustificato.

Comunque "*si trova che funziona*".

Il passaggio alla relatività ristretta è in certo senso più intuitivo e più giustificabile. Anche qui vogliamo un principio esprimibile come

$$\delta S = 0$$

E il trucco è trovare S. Ma siamo in relatività ristretta, e le restrizioni su S sono più stringenti che in meccanica classica. Per una particella libera, anzitutto vogliamo che l'integrale non dipenda dal sistema di riferimento, e quindi sia invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz. Poi vogliamo che l'integrando sia uno scalare e un differenziale del primo ordine (e questo, penso, essenzialmente cominciando dalla posizione più semplice e complicandola solo se necessario). Ma, afferma il Landau ("*Classical Theory of Fields*", §8) il solo scalare che ha queste prerogative per una particella libera è l'intervallo ds o α ds , dove α è un'opportuna costante. Quindi l'azione potrà essere scritta:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

S è l'integrale lungo la linea di mondo della particella tra i due particolari eventi dell'arrivo della particella alla posizione iniziale ed alla posizione finale in tempi definiti t1 e t2 , e **α è una costante che caratterizza la particella**.

L'estremo che cerchiamo per S deve essere un minimo. Ma l'integrale di ds tra gli eventi a e b ha un massimo lungo il cammino della particella a riposo, ma non ha un minimo, perché deformando il percorso fra due eventi dello spazio-tempo, l'integrale può diventare arbitrariamente piccolo (per esempio, scegliendo cammini percorsi dalla luce, l'intervallo si annulla). Per avere un minimo non zero è quindi necessario premettere all'integrale su ds una costante negativa, – α, con α sempre positiva per qualsiasi particella.

Un'azione così formulata, proporzionale al cammino percorso in quattro dimensioni ha una sua ragion d'essere e richiama alla mente il principio di Fermat e altri. Tuttavia la si può trasformare in modo da farla assomigliare anche a un'azione simile a quella della meccanica analitica classica, cioè un'integrale rispetto al tempo del tipo di:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

Dove L è la cosiddetta funzione lagrangiana.

Come è noto, nella meccanica non relativistica, la lagrangiana, in un sistema di riferimento inerziale, ha la forma

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\,\phi$$

In cui ϕ è una data funzione delle coordinate spaziali e del tempo che caratterizza il campo, ed è detta "potenziale gravitazionale". Essa non contiene alcuna proprietà della particella, né massa né altro.

Noi la riscriviamo come

$$L = -\,mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\,\phi$$

L'aggiunta di una costante è permessa in quanto l'estremo non muta in funzione delle variabili spazio-temporali aggiungendo una costante. Inoltre, l'aggiunta di **questa** costante, - m c^2, è giustificata dal fatto la lagrangiana della particella **libera** relativistica (che qui si suppone nota),

$$L = -mc^2(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})$$

per v<< c diventa:

$$-mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\dots\right) = -mc^2+\frac{mv^2}{2}\dots$$

A cui si dovrebbe ridurre la nostra lagrangiana se $\phi \rightarrow 0$. Così è infatti, grazie alla nostra scelta della costante.

Tirando le fila di quanto sommariamente fatto sinora, abbiamo che:

$$S = -\alpha\int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -mc\int(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\phi}{c})\,dt$$

Il che identifica $-\alpha$ con - mc, e

$$ds = \left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\phi}{c}\right)dt$$

Il quadrato di ds è :

$$ds^2 = (c^2+2\phi+\frac{\phi^2}{c^2}-v^2-\frac{\phi v^2}{c^2}+\frac{v^4}{4c^2})\,dt^2$$

Da cui, sostituendo v^2 con $\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ ed eliminando il terzo, quinto e sesto termine, per la presenza del fattore c^2 al denominatore, otteniamo la forma:

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi)dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Nel caso limite che stiamo considerando, la componente g_{00} del tensore metrico, ricavata da $g_{00}(c^2dt^2) = (c^2 + 2\phi)dt^2$ è quindi

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Che è la formula desiderata , che, in caso di spostamento dx, dy, dz nullo, ci dà la dilatazione temporale. **Notiamo che l'identificazione fatta più sopra, di – α con - mc, ci porta a concludere che la massa deve sempre essere positiva.**

Il metodo usato non ci permette di trovare le correzioni ai coefficienti spaziali e spazio-temporali della metrica, che invece sarebbero presenti, con valori dell'ordine della correzione del termine g_{00}, cioè

$$\frac{2\Phi}{c^2}$$

Il problema, afferma Landau (§87) è legato al fatto che , per quanto le correzioni ai coefficienti in questione in sé sarebbero dello stesso ordine della correzione di g_{00}, sarebbero comunque di un maggior ordine di piccolezza, in quanto solo quest'ultimo termine è moltiplicato per la costante c^2.

Si paragoni ora la metrica appena trovata alla metrica di Schwartzschild completa, che vale anche per i buchi neri, quale si ottiene come soluzione delle equazioni di Einstein, ciò che non abbiamo neppure tentato di fare:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2\, dt^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Qui, la costante r_g , che deriva da ϕ = - GM/r, vale $r_g = 2GM/c^2$, il cosiddetto raggio di Schwartzschild già incontrato al termine di I (Pauli). Si vede quindi che per campo gravitazionale debole si intende un campo gravitazionale quale esso è sentito a una distanza r, maggiore del raggio di Schwartzschild, in modo da rendere poco significativi i termini del secondo ordine negli eventuali sviluppi in r_g/r.

La parte spaziale, qui data in coordinate sferiche, è alquanto differente dalla forma che abbiamo trovato, in particolare nella parte radiale ma, come si è visto, può essere trascurata.

Scrivendo $ds^2 = (c\,d\tau)^2$, si vede che $\tau = \sqrt{(1-r_g/r)}\ t$, il che ci riporta ai valori numerici già visti in precedenza, che qui è inutile derivare di nuovo.

Bye, coraggioso lettore!